


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
 НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

Е.Н. ЛАПУЗИНА, А.И. ЛОБОДА, И.В. СМОРОДСКАЯ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ ИНОСТРАННЫХ СТУДЕНТОВ
В ДВУХ ЧАСТЯХ**

ЧАСТЬ 1

**УТВЕРЖДЕНО
РЕДАКЦИОННО-ИЗДАТЕЛЬСКИМ
СОВЕТОМ УНИВЕРСИТЕТА
ПРОТОКОЛ №2 ОТ 24.12.2014 г.**

**Харьков
НТУ «ХПИ»
2015**

УДК 512.643:514.123(075)

ББК 22.1я73

Л 24

Рецензенти:

В.П. Ольшанський, д-р фіз.-мат. наук, проф. ХНТУ сільського господарства;

В.О. Шалаєв, канд.фіз.-мат. наук, доц. ХНУ ім. В. Каразіна;

Н.В. Северін, канд. філ. наук, доц. НТУ «ХПІ»

Навчальний посібник містить теоретичний та практичний матеріал (варіанти модульних та контрольних робіт, розрахунково-графічних завдань та приклади розв'язання 0-го варіанту) за розділами вищої математики, які включені до програми підготовки іноземних студентів 1-го курсу інженерного та економічного профілю. Посібник містить такі розділи: визначники, матриці, методи розв'язання систем лінійних рівнянь, елементи аналітичної геометрії та векторної алгебри.

Призначено для іноземних студентів інженерного та економічного профілю навчання.

Л 24 Лапузіна Е.Н. Высшая математика в примерах и задачах. Учебное пособие для иностранных студентов / Е.Н. Лапузіна, А.И. Лобода, И.В. Смородская – Харьков: НТУ «ХПИ», 2015. – 160 с. – На рус. яз.

ISBN

Учебное пособие содержит теоретический и практический материал (варианты модульных и контрольных работ, расчетно-графических заданий и примеры решения 0-го варианта) по разделам высшей математики, которые включены в программу подготовки иностранных студентов 1-го курса инженерного и экономического профиля. В пособие вошли следующие разделы: определители, матрицы, методы решения систем линейных уравнений, элементы аналитической геометрии и векторной алгебры.

Предназначено для иностранных студентов инженерного и экономического профиля обучения.

Рис. 15. Табл. 12. Бібліогр. 11 назв.

УДК 512.643:514.123(075)

ББК 22.1я73

ISBN

© О.М. Лапузіна, А.И. Лобода, И.В. Смородська, 2015 р.

© НТУ «ХПІ», 2015 р.

© Т.С. Космачова, макет та оформлення, 2015 р.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено для иностранных студентов инженерных и экономических специальностей, изучающих курс «Высшая математика».

Данное пособие является первой частью комплекса, состоящего из трех частей, которые построены по следующему общему принципу:

- перечень контрольных работ и расчетно-графических заданий (РГЗ);
- краткие теоретические сведения, необходимые для выполнения модульной контрольной работы;
- примеры решения вариантов контрольных работ;
- 10 вариантов заданий для самостоятельного решения.

Содержание данного пособия определяется учебными планами и программами по высшей математике для студентов инженерного и экономического профилей I курса обучения и включает разделы высшей математики («Линейная алгебра», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия»), которые необходимы для успешного написания контрольных работ, расчетно-графических заданий, а также выполнения модульной контрольной работы по предмету.

Доступное изложение основных понятий теории, примеры решения типовых задач, контрольные вопросы и задания дают студентам возможность самостоятельно работать с пособием.

Пособие поможет иностранным студентам:

- найти нужную информацию о том или ином понятии курса «Высшая математика»;
- повторить соответствующий материал при подготовке к выполнению контрольных или модульных работ, а также расчетно-графических заданий по высшей математике.

В пособии приведен тематический словарь-гlossарий, в котором представлены ключевые слова и понятия, используемые в

текстах и заданиях. Словарь составлен на английском, французском, арабском, вьетнамском, китайском и туркменском языках.

Пособие содержит перечень основных условных обозначений, принятых в математике, а также основные математические формулы и соотношения.

Авторы выражают благодарность рецензентам В.П. Ольшанскому, доктору физ.-мат. наук, профессору ХНТУ сельского хозяйства, В.А.Шалаеву, канд. физ.-мат. наук, доц. ХНУ им. В. Каразина, Н.В. Северин, канд. фил. наук, доц. НТУ «ХПИ» за ценные замечания и советы.

Особую признательность авторы выражают инженеру кафедры естественных наук факультета международного образования НТУ «ХПИ» Т.С. Космачевой за помощь в оформлении книги и подготовку к печати оригинал-макета пособия.

МОДУЛЬ 1

- **ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**
- **ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА**
- **АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

Чтобы успешно выполнить модульную контрольную работу 1, необходимо сделать следующие задания.

1. **Контрольная работа 1.** Вычисление определителей. Действия над матрицами.
2. **Контрольная работа 2.** Решение систем линейных алгебраических уравнений.
3. **Контрольная работа 3.** Векторная алгебра. Действия над векторами.
4. **Расчетно-графическое задание 1 (РГЗ 1).** Решение систем линейных алгебраических уравнений. Решение инженерно-экономических задач.
5. **Расчетно-графическое задание 2 (РГЗ 2).** Задачи о прямой на плоскости. Построение графиков кривых второго порядка. Решение задач инженерно-экономического содержания.

Для выполнения этих заданий нужно знать основные формулы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, владеть основными методами решения систем линейных алгебраических уравнений с использованием определителей и матриц, операций над векторами, а также уметь определять параметры кривых первого и второго порядка. Теоретическая информация для решения задач и примеры решений каждого задания приведены перед вариантами для самостоятельного решения каждой контрольной работы и расчетно-графического задания.

Каждую контрольную работу или РГЗ необходимо оформлять по следующему образцу:

Контрольная работа 1
по высшей математике
студента I курса группы _____
_____ факультета
Национального технического университета
«Харьковский политехнический институт»

(Фамилия, имя студента)

- Выполнять контрольную работу или РГЗ нужно по своему варианту, номер которого укажет преподаватель.
- Условия решаемых задач должны быть записаны полностью. Решение задач должно иметь подробные объяснения.
- Выполненные работы можно сдать преподавателю лично или прислать на e-mail: pf-40@mail.ru.

Контрольная работа 1

- ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ,
НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 1.
Вычисление определителей.
Действия над матрицами
- ПРИМЕР КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 1
- ПРИМЕР РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ
РАБОТЫ 1
- КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1.
Варианты заданий

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 1

Вычисление определителей

- 1. Определитель 2-го порядка.** Для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с двумя неизвестными, часто используют определитель второго порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ для } \begin{cases} a_1x + b_1x = c_1, \\ a_2x + b_2x = c_2. \end{cases}$$

Главный определитель СЛАУ (определитель второго порядка) состоит из коэффициентов при переменных.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Вспомогательный определитель СЛАУ состоит из коэффициентов при переменных и свободных членов.

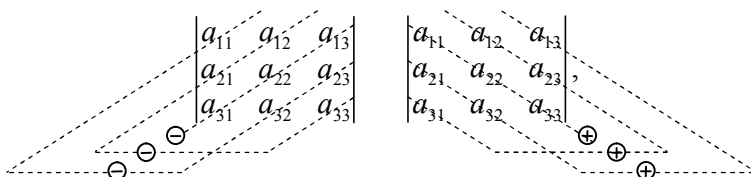
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

- 2. Определитель 3-го порядка.** Определитель системы трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными называют определителем третьего порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ для СЛАУ } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2, \\ a_{31}x_1 + a_{33}x_2 + a_{33}x_3 = c_3. \end{cases}$$

Вычисляют этот определитель двумя способами.

ПЕРВЫЙ СПОСОБ



$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}.$$

Второй способ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \quad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - \\ - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - \\ - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}).$$

3. **Минор M_{ij} элемента a_{ij} .** Определитель порядка $(n-1)$, который получают из данного определителя вычеркиванием строки i в столбце j называют минором M_{ij} элемента a_{ij} .

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. **Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} .** Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} — это соответствующий минор M_{ij} со знаком плюс, если $i+j$ четное число и со знаком минус, если $i+j$ нечетное число.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

5. **Определитель системы линейных уравнений.** Определитель системы линейных уравнений равен сумме произведений элементов какого-либо ряда (строки или столбца) на ал-

гебраические дополнения этих элементов.

$$\Delta = \sum_{j=1}^n (-1)^{(i+j)} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij},$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

СВОЙСТВО ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. Определитель равен нулю, если:
 - а) он имеет два одинаковых ряда;
 - б) все элементы одной его строки или столбца равны нулю.
2. Вычисление определителя, у которого все элементы строки i или столбца j , кроме a_{ij} , равны нулю сводится к вычислению одного определителя $(n-1)$ порядка.

$$\Delta = a_{ij} A_{ij} = a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

3. Значение определителя равно произведению элементов главной диагонали, если все элементы над его главной диагональю (или под главной диагональю) равны нулю.

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

4. Значение определителя не изменится, если:
 - а) две его строки или два столбца поменять местами четное число раз;
 - б) заменить элементы соответствующих строк элементами столбцов (транспонирование);
 - в) к каждому элементу какой-либо строки (или столбца) прибавить числа, пропорциональные элементам другой строки (или столбца).
5. Определитель изменит знак на противоположный, если поменять местами строки или столбцы нечетное количество раз.
6. Общий множитель, который содержится в одной строке (или столбце), можно вынести за знак определителя.

7. Определитель можно записать как сумму двух определителей, если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны сумме двух слагаемых.

Действия над матрицами

1. **Матрица.** Матрица – это прямоугольная таблица, составленная из чисел или других объектов. Матрица – это всегда таблица (определитель равен числу). Матрица состоит из строк и столбцов. Матрица обозначается большими буквами латинского алфавита.

Для СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

таблица-матрица коэффициентов будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & 2 \\ 3 & 7 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. **Виды матриц.** Классификация матриц представлена в таблице 1.

Таблица 1

Название	Характеристика	Пример
Прямоугольная матрица	Прямоугольная матрица состоит из m строк и n столбцов	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
Квадратная матрица	Матрица, у которой число строк равно числу столбцов	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 1

Матрица-строка	Матрица состоит из одной строки	$K = \ k_{i1}, k_{i2} \dots k_{in}\ $
Матрица-столбец	Матрица состоит из одного столбца	$C = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{vmatrix}, \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{vmatrix}$
Диагональная матрица	Все элементы вне главной диагонали равны нулю	$D = \begin{vmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}$
Единичная матрица	Диагональная матрица, у которой $d_{11} = d_{22} = d_{33} = \dots = d_{nn} = 1$	$E_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$
Нулевая матрица	Все элементы матрицы равны нулю	$A_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$
Верхняя треугольная матрица	Все элементы под главной диагональю равны нулю	$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
Нижняя треугольная матрица	Все элементы над главной диагональю равны нулю	$A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
Взаимобратные матрицы	Это две квадратные матрицы, произведение которых равно 1	$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = 1$
Расширенная матрица	Матрица, которая кроме коэффициентов a_{ij} , содержит и свободные члены	$AQ = \left\ \begin{array}{cccc c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & q_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & q_m \end{array} \right\ $

3. **Свойства и действия над матрицами.** Свойства и действия над матрицами представлены в таблице 2.

Таблица 2

Действия/Свойства	Характеристика
Равенство матриц	Матрица A равна матрице B , если соответствующие элементы a_{ij} матрицы A равны элементам b_{ij} матрицы B , и размеры матриц одинаковы
Сложение матриц	Сумма двух матриц A и B одинакового размера – это матрица $C = A + B$ такого же размера, у которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
Умножение матрицы на число (вынесение общего множителя за знак матрицы)	Произведение матрицы A на число α – это матрица C , если $C = \alpha \cdot A, \text{ у которой } c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$
Если матрицы A , B , C одинакового размера $m \times n$, а l и k – действительные числа, то:	1) $(A + B) + C = A + (B + C)$; 2) $A + (-A) = 0$; 3) $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$; 4) $(k + l) \cdot A = k \cdot A + l \cdot A$; 5) $(k \cdot l) \cdot A = k \cdot (l \cdot A)$; 6) $1 \cdot A = A$; 7) $A - B = A + (-B)$
Умножение матрицы на матрицу	Произведение матрицы A размером $m \times n$ на матрицу B размера $n \times r$ – это матрица $C = A \cdot B$ размера $m \times r$, элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов строки i матрицы A на соответствующие элементы столбца j матрицы B
$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$	

Свойства произведения матриц	1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$; 2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$; 3) $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$; 4) $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = (k \cdot B) \cdot A$; 5) $E_m \cdot A = A \cdot E_m = A$
Транспонирование матрицы	Это замена строк матрицы столбцами (или столбцов строками) с сохранением их нумерации. При транспонировании произвольная матрица размера $m \times n$ становится матрицей размера $n \times m$
Возведение матриц в степень	1) $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_k$; 2) $A^k \cdot A^m = A^{k+m}$; 3) $(A^k)^m = A^{k \cdot m}$

4. **Минор k -го порядка матрицы размера $m \times n$** – это определитель, составленный из элементов матрицы, которые стоят на пересечении k строк и k столбцов этой матрицы.
5. **Ранг матрицы** – это натуральное число r , равное наивысшему порядку ее миноров, отличных от нуля. Все миноры порядка $r + 1$ и выше равны нулю.
6. **Базисный минор матрицы** – это всякий минор r -го порядка для матрицы, ранг которой $r \geq 0$.

Ранг и базисный минор матрицы можно найти двумя способами:

- а) с помощью элементарных преобразований. Для этого нужно привести эту матрицу к треугольной или трапециевидной форме. Число ненулевых строк преобразованной матрицы определит ранг r исходной матрицы, а ненулевые миноры порядка r будут базисными;
- б) методом «окаймления» миноров. Для этого нужно найти все ненулевые миноры матрицы. Наибольший порядок ненуле-

вого минора будет равен рангу матрицы, а миноры этого порядка будут базисными.

7. **Присоединенная матрица** – это транспонированная матрица, которая составлена из алгебраических дополнений элементов матрицы A :

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

8. **Обратная матрица.** На практике обратную матрицу чаще всего находят с помощью:

- а) присоединенной матрицы по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} \text{ или } A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \tilde{A};$$

- б) совместного преобразования данной матрицы и единичной матрицы.

9. **Упрощенная матрица.** Для приведения расширенной матрицы $A|Q$ к упрощенному виду используют:

- а) метод Жордана-Гаусса, который сводится к преобразованию матрицы. В результате этого преобразования все элементы строки или столбца, за исключением одного, обращаются в нуль;
- б) метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных). Он сводится к исключению на каждом шаге одной переменной системы. Применяя элементарные преобразования, матрицу системы приводят к равносильной, трапецеидальной (или треугольной) матрице. При этом вычисления распадаются на два этапа: прямой ход и обратный ход.

ПРИМЕР КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 1
Вычисление определителей. Действия над матрицами

ЗАДАНИЕ 1. Найдите алгебраические дополнения элементов определителя и вычислите определитель, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ 2. Вычислите определитель четвертого порядка, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 10 \\ 4 & 9 & 13 & 15 \end{vmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ 3. Найдите сумму матриц A и B , если

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & 0,5 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \end{vmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ 4. Найдите ранг и базисный минор матрицы A , если

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ 5. Найдите матрицу, обратную заданной матрице A , если

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix}.$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 1
Вычисление определителей. Действия над матрицами

ЗАДАНИЕ 1. Найдите алгебраические дополнения элементов определителя и вычислите определитель, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{13} = 3;$$

$$a_{21} = 3, \quad a_{22} = 2, \quad a_{23} = 1;$$

$$a_{31} = 2, \quad a_{32} = 3, \quad a_{33} = 1.$$

Вычислим алгебраические дополнения элементов определителя:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot 3) = 7,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = -5,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = -4,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (1 \cdot 1 - 3 \cdot 3) = 8,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot 3) = -4.$$

Вычислим определитель при помощи разложения его по первой строке:

$$\Delta = \sum_{j=1}^3 a_{1j} \cdot A_{1j} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 = 12.$$

ОТВЕТ. $A_{11} = -1$, $A_{12} = -1$, $A_{13} = 5$, $A_{21} = 7$, $A_{22} = -5$, $A_{23} = 1$,
 $A_{31} = -4$, $A_{32} = 8$, $A_{33} = -4$. Определитель $\Delta = 12$.

ЗАДАНИЕ 2. Вычислите определитель четвертого порядка, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 10 \\ 4 & 9 & 13 & 15 \end{vmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Такой определитель можно вычислить тремя методами.

ПЕРВЫЙ МЕТОД

Раскроем определитель по первой строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 10 \\ 4 & 9 & 13 & 15 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 10 \\ 9 & 13 & 15 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 10 \\ 4 & 13 & 15 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 10 \\ 4 & 9 & 15 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 8 \\ 4 & 9 & 13 \end{vmatrix} = -7.$$

ОТВЕТ. $\Delta = -7$.

ВТОРОЙ МЕТОД

Вычислим определитель при помощи элементарных преобразований.

Сделаем преобразования на основании свойства определителя (свойство 4).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 10 \\ 4 & 9 & 13 & 15 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{-2 \cdot R_1 \rightarrow R_2 \\ -3 \cdot R_1 \rightarrow R_3 \\ -4 \cdot R_1 \rightarrow R_4}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вычислим один определитель третьего порядка (этого достаточно, чтобы вычислить определитель Δ). Все остальные слагаемые равны нулю.

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 2 - 6 = -7.$$

ОТВЕТ. $\Delta = -7$.

ТРЕТИЙ МЕТОД

Сделаем преобразования. 1-й шаг – это преобразования такие же, как во втором методе. После 1-го шага продолжим преобразования, отбавив в ноль все элементы под главной диагональю.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 10 \\ 4 & 9 & 13 & 15 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{-2} \\ \xrightarrow{-3} \\ \xrightarrow{-4} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{1} \end{array} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{-3} \\ \xrightarrow{-4} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-7) = -7. \end{aligned}$$

ОТВЕТ. $\Delta = -7$.

ЗАДАНИЕ 3. Найдите сумму матриц A и B , если

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & 0,5 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \end{vmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ

$$C = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & 0,5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2,5 & 0 \end{vmatrix}.$$

ОТВЕТ. $A + B = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2,5 & 0 \end{vmatrix}.$

ЗАДАНИЕ 4. Найдите ранг и базисный минор матрицы A , если

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Это задание можно выполнить двумя методами.

ПЕРВЫЙ МЕТОД (с помощью элементарных преобразований)

Приведем матрицу A к трапециевидной форме, используя элементарные преобразования:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Преобразованная матрица имеет две ненулевые строки, значит $\text{rang } A = 2$. Как базисный минор можно рассматривать минор второго порядка:

$$M = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

ОТВЕТ. $\text{rang } A = 2$.

ВТОРОЙ МЕТОД (при помощи «окаймления» миноров)

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Миноры первого порядка матрицы A – это ее элементы (всего 12), среди них есть ненулевые: $M_1 = -1$, $M_2 = -2$, $M_3 = 1$ и т.д. Миноры 2-го порядка (всего их 18) имеют такой вид:

$$M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Среди миноров 2-го порядка также есть ненулевые.
Миноров 3-го порядка всего 4, и все они равны нулю:

$$M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad M_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Самый высокий порядок ненулевых миноров равен 2, значит $\text{rang } A = 2$.

ОТВЕТ. $\text{rang } A = 2$.

ЗАДАНИЕ 5. Найдите матрицу, обратную заданной матрице A , если

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Это задание можно выполнить двумя методами.

ПЕРВЫЙ МЕТОД

Найдем определитель матрицы A :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 24 \neq 0.$$

Обратная матрица существует.

Найдем алгебраические дополнения каждого элемента определителя Δ :

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = 19, \quad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -28, \quad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -16, \quad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 12;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Составим присоединенную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} 19 & -28 & 11 \\ 10 & -16 & 2 \\ -3 & 12 & -3 \end{vmatrix}.$$

Составим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{24} \cdot \begin{vmatrix} 19 & -28 & 11 \\ 10 & -16 & 2 \\ -3 & 12 & -3 \end{vmatrix}.$$

ОТВЕТ. $A^{-1} = \frac{1}{24} \cdot \begin{vmatrix} 19 & -28 & 11 \\ 10 & -16 & 2 \\ -3 & 12 & -3 \end{vmatrix}.$

ВТОРОЙ МЕТОД

Выполним элементарные преобразования строк данной матрицы A и единичной матрицы E . Для удобства запишем их рядом и будем выполнять элементарные преобразования над ними одновременно.

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \boxed{-1 \ -3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & -16 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \\ \boxed{-4} \\ \leftarrow \end{array} = \\ & = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -4 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow \\ \boxed{\frac{2}{3} \ -5} \\ \leftarrow \end{array} = \\ & = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{2} & \frac{5}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \boxed{-2} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{19}{24} & -\frac{7}{6} & \frac{11}{24} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{19}{24} & -\frac{28}{24} & \frac{11}{24} \\ \frac{10}{24} & -\frac{16}{24} & \frac{2}{24} \\ -\frac{3}{24} & \frac{12}{24} & -\frac{3}{24} \end{vmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{vmatrix} 19 & -28 & 11 \\ 10 & -16 & 2 \\ -3 & 12 & -3 \end{vmatrix}.$$

ОТВЕТ. $A^{-1} = \frac{1}{24} \cdot \begin{vmatrix} 19 & -28 & 11 \\ 10 & -16 & 2 \\ -3 & 12 & -3 \end{vmatrix}.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1
Вычисление определителей. Действия над матрицами
Варианты заданий

ЗАДАНИЕ 1. Найдите алгебраические дополнения элементов определителя и вычислите определитель, если

$$1. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}. \quad 2. \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}. \quad 3. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$4. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}. \quad 5. \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}. \quad 6. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$7. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}. \quad 8. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}. \quad 9. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$10. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ 2. Вычислите определитель четвертого порядка, если

$$1. \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}. \quad 2. \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$3. \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & -3 & 9 \\ 6 & 3 & -3 & 3 \\ -6 & -2 & 4 & -2 \end{vmatrix}. \quad 4. \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$5. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad 6. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$7. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$8. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$9. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$10. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ 3. Даны матрицы A и B и числа α и β . Найдите:
 $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$, если

$$1. A = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \alpha = -2, \beta = 4.$$

$$2. A = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}, \quad \alpha = 2, \beta = 3.$$

$$3. A = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \alpha = -1, \beta = -2.$$

$$4. A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \alpha = 4, \beta = 3.$$

$$5. A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \alpha = 2, \beta = -1.$$

$$6. A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \alpha = 3, \beta = 2.$$

$$7. A = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \alpha = 4, \beta = -3.$$

$$8. A = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \alpha = 2, \beta = -2.$$

$$9. A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \alpha = 3, \beta = -1.$$

$$10. A = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \alpha = -1, \beta = 4.$$

ЗАДАНИЕ 4. Найдите ранг и базисный минор матрицы A , если

$$1. A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$2. A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$3. A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$4. A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & -7 \end{vmatrix}.$$

$$5. A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & -6 & -8 \end{vmatrix}.$$

$$6. A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 9 & 12 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$7. A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \\ -3 & -8 & -6 & -14 \end{vmatrix}.$$

$$8. A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 6 & -2 & -4 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$9. A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ -2 & -6 & -14 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$10. A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & -6 & 4 \end{vmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ 5. Найдите матрицу, обратную заданной матрице A , если

$$1. A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}. \quad 2. A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}. \quad 3. A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$4. A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}. \quad 5. A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}. \quad 6. A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$7. A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix}. \quad 8. A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}. \quad 9. A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$10. A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Контрольная работа 2

- ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ,
НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 2.
Решение систем линейных
алгебраических уравнений
- ПРИМЕР КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 2
- ПРИМЕР РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ
РАБОТЫ 2
- КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2.
Варианты заданий

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 2

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (СЛАУ) можно решить несколькими методами (способами).

1. РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ (СПОСОБОМ) КРАМЕРА.

- а) система имеет единственное решение, если главный определитель системы не равен нулю $\Delta \neq 0$. Решение находят, используя формулы Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

- б) система может не иметь ни одного решения (быть несовместной), если главный определитель системы равен нулю $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей $\Delta_j \neq 0$;
- в) система может иметь бесконечное множество решений, если главный определитель системы равен нулю $\Delta = 0$ и все определители $\Delta_j = 0$.

2. РЕШЕНИЕ СЛАУ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ.

Система линейных уравнений в матричной форме будет записана как $A \cdot X = Q$, где:

- а) матрица коэффициентов при переменных x_j – это $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{nn} \end{pmatrix}$;

- б) матрица свободных членов q_j – это матрица-столбец $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}$;

- в) матрица независимых переменных x_j – это $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Решением заданной системы уравнений в матричной форме будет: $X = A^{-1} \cdot Q$, где A^{-1} матрица обратная A (смотрите контрольную работу 1, задание 5).

3. РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИСКЛЮЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ (МЕТОД ГАУССА).

С помощью элементарных преобразований расширенную матрицу СЛАУ

$$A|Q = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & q_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & q_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & q_n \end{array} \right]$$

приводят к треугольному виду (прямой ход Гаусса), при этом $\text{rang } A|Q = \text{rang } A$.

$$A|Q = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^* & a_{13}^* & \cdots & a_{1n}^* & q_1^* \\ 0 & 1 & a_{23}^* & \cdots & a_{2n}^* & q_2^* \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{3n}^* & q_3^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & q_n^* \end{array} \right].$$

На втором этапе из последнего уравнения находим $x_n = q_n^*$. Подставляя $x_n = q_n^*$ в предыдущее уравнение, находим x_{n-1} и так далее до вычисления x_1 (обратный ход Гаусса). В случае, если упрощенная матрица приведена к трапецеидальному виду или решается система m уравнений с n неизвестными, необходимо:

- привести расширенную матрицу СЛАУ к упрощенному виду;
- проверить совместность упрощенной системы;
- решить упрощенную систему, если она совместна.

4. РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ЖОРДАНА-ГАУССА.

Метод сводится к последовательному преобразованию расширенной матрицы, в результате которых все элементы строки или столбца, за исключением одного, обращаются в нуль.

$$\begin{matrix} & & \overbrace{\hspace{2cm}}^r & & \overbrace{\hspace{2cm}}^{n-r} & & \\ r & \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \end{array} \right] & \begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_r \end{array} \end{array} \right. \\ m-r & \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{c} 0 \\ \dots \\ 0 \end{array} \end{array} \right. \end{matrix}.$$

Этой матрице соответствует упрощенная система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = \beta_1, \\ x_2 + a_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = \beta_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = \beta_r. \end{cases}$$

Общее решение системы получим в следующей форме:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - a_{1,r+1}c_1 - \dots - a_{1n}c_{n-r}, \\ x_2 = \beta_2 - a_{2,r+1}c_1 - \dots - a_{2n}c_{n-r}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ x_r = \beta_r - a_{r,r+1}c_1 - \dots - a_{rn}c_{n-r}, \\ x_{r+1} = c_1, \\ x_{r+2} = c_2, \\ \dots \quad \dots, \\ x_n = c_{n-r}. \end{cases}$$

ПРИМЕР КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 2
Решение систем линейных алгебраических уравнений

ЗАДАНИЕ 1. Решите систему линейных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 12. \end{cases}$$

ЗАДАНИЕ 2. Решите систему трех уравнений с тремя неизвестными при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25. \end{cases}$$

ЗАДАНИЕ 3. Решите систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными, используя метод Жордана-Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_3 + 4x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$$

ЗАДАНИЕ 4. Решите систему уравнений, используя метод Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 30, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 34, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 41. \end{cases}$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 2

Решение систем линейных алгебраических уравнений

ЗАДАНИЕ 1. Решите систему линейных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 12. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Преобразуем определитель системы уравнений к треугольному виду и найдем его значение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{-2 \cdot R_1 \\ -3 \cdot R_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{-R_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5.$$

Главный определитель $\Delta \neq 0$, значит, система имеет одно единственное решение. Найдем вспомогательные определители Δx_1 , Δx_2 , Δx_3 :

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 12 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 15, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 12 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} = -20.$$

Решение системы запишем по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-20}{5} = -4.$$

ОТВЕТ. $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = -4$.

ЗАДАНИЕ 2. Решите систему трех уравнений с тремя неизвестными при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем заданную систему в матричной форме.

$$A \cdot X = Q \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы представим в виде решения заданной системы уравнений в матричной форме: $X = A^{-1} \cdot Q$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти числовые значения неизвестных, нам нужно найти обратную матрицу A^{-1} (смотрите контрольную работу 1, задание 5):

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 19 & -28 & 11 \\ 10 & -16 & 2 \\ -3 & 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти элементы матрицы X , необходимо умножить матрицу A^{-1} на матрицу Q :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 19 & -28 & 11 \\ 10 & -16 & 2 \\ -3 & 12 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} -174 & -56 & 275 \\ -90 & -32 & 50 \\ 27 & 24 & -75 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 48 \\ -72 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Мы получили равенство двух матриц:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

ОТВЕТ. $x_1 = 2, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = -1.$

ЗАДАНИЕ 3. Решите систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными, используя метод Жордана-Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_3 + 4x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Составим основную матрицу A системы уравнений и ее расширенную матрицу $A|Q$. Преобразуем расширенную матрицу.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A|Q = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & -1 & 1 & -2 & 2 & & & \\ 2 & 0 & -1 & 4 & 4 & & & \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 4 & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

После первого шага расширенная матрица будет иметь следующий вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -2 & 2 & & & \\ 0 & 2 & -3 & 8 & 0 & & & \\ 0 & 5 & -2 & 6 & -7 & & & \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 2 & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

После второго шага расширенная матрица будет такой:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -2 & 2 & & & \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -2 & & & \\ 0 & 2 & -3 & 8 & 0 & & & \\ 0 & 5 & -2 & 6 & -7 & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & & & \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & 8 & 4 & & & \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 3 & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

После третьего шага расширенная матрица будет иметь следующий вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & & & \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & & & \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 3 & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & & & \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\frac{2}{3}} & \frac{1}{3} & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

После четвертого шага расширенная матрица будет такой:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right\|.$$

Упрощенная расширенная матрица показывает, что система уравнений совместна и ее решение будет таким:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = \frac{1}{2}.$$

ОТВЕТ. $x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = \frac{1}{2}.$

ЗАДАНИЕ 4. Решите систему уравнений, используя метод Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 30, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 34, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 41. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Основную и расширенную матрицы запишем в виде:

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \end{array} \right\|, \quad A|Q = \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 30 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 34 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 41 \end{array} \right\|.$$

Преобразуем расширенную матрицу.

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 30 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 34 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 41 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} -2-3-4 \\ \\ \\ \end{array} = \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Ранг этой матрицы равен 4 ($\text{rang } A = \text{rang}(A|Q) = n$), значит,

система уравнений совместна. Полученную матрицу преобразуем обратным ходом Гаусса.

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \begin{array}{|c|} \hline -2 \\ \hline \end{array} \\ \leftarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline -3 & -1 & \\ \hline \end{array} \end{array} = \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \begin{array}{|c|c|} \hline -2 & -1 \\ \hline \end{array} \\ \\ \end{array} =$$

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline \end{array} \\ \\ \\ \end{array} = \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Решение системы уравнений: $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$.

ОТВЕТ. $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2
Решение систем алгебраических уравнений
Варианты заданий

ЗАДАНИЕ 1. Решите систему линейных уравнений методом Крамера.

$$1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -7. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -7. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 10, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = -5, \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

ЗАДАНИЕ 3. Решите систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными, используя метод Жордана-Гаусса.

$$1. \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 19, \\ 5x_1 - 2x_2 - 8x_4 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 - 26x_4 = -1. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -3, \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 9. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 19, \\ 5x_1 - 2x_2 - 8x_4 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 - 26x_4 = -1. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \\ 4x_1 - 7x_2 - x_3 - 8x_4 = -5, \\ 10x_1 - 18x_2 + 2x_3 - 23x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
 5. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 9, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -6. \end{cases} & 6. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -6. \end{cases} \\
 7. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -5, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = -3, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases} & 8. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -12, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 17, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases} \\
 9. \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -11, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13. \end{cases} & 10. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}
 \end{array}$$

ЗАДАНИЕ 4. Решите систему уравнений, используя метод Гаусса.

$$\begin{array}{ll}
 1. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases} & 2. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases} \\
 3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -11, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 19. \end{cases} & 4. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2, \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases} \\
 5. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases} & 6. \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases} \\
 7. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases} & 8. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 5. \end{cases} \\
 9. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 21x_4 = 18. \end{cases} & 10. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 7, \\ -6x_1 - 15x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -3, \\ 4x_1 + 10x_2 + 14x_4 = 50. \end{cases}
 \end{array}$$

Контрольная работа 3

- ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ,
НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 3.
**Векторная алгебра. Действия
над векторами**
- ПРИМЕР КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 3
- ПРИМЕР РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ
РАБОТЫ 3
- КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3.
Варианты заданий

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 3**

Векторная алгебра. Действия над векторами

Вектор – это отрезок, который имеет направление.

Вектор \overrightarrow{AB} можно задать:

- а) двумя точками A и B , где точка $A(x_1, y_1, z_1)$ – это начало вектора, а точка $B(x_2, y_2, z_2)$ – конец вектора;
- б) координатами вектора $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Координаты вектора \overrightarrow{AB} – это числа $(AB)_x = x_2 - x_1$, $(AB)_y = y_2 - y_1$, $(AB)_z = z_2 - z_1$ (проекции вектора на оси координат Ox , Oy , Oz).

Модуль вектора (длина вектора) – это расстояние между началом и концом вектора $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Нулевой вектор – это вектор, начало и конец которого совпадают.

Единичные векторы (орты) \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – это векторы, направления которых совпадают с направлением координатных осей Ox , Oy , Oz . Длина каждого из векторов равна единице.

Разложение вектора \vec{a} по ортам $\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$. Здесь a_x , a_y , a_z это проекции вектора \vec{a} на оси Ox , Oy , Oz (координаты вектора).

Направляющие косинусы это косинусы углов, которые вектор \vec{a} составляет с положительным направлением осей координат:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Коллинеарные векторы – это векторы, которые лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Компланарные векторы – это векторы параллельные одной и той же плоскости.

1. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Скалярным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, равное произведению их модулей на $\cos\varphi$, где φ – это угол между векторами:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi, \quad \varphi \leq \pi.$$

Угол между векторами определяется из формулы

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Скалярное произведение обозначают так:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \text{ или } (\vec{a}, \vec{b}).$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, заданных своими координатами, определяется формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

Условие перпендикулярности векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ или } a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0.$$

Основные свойства скалярного произведения:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- 2) $\alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$;
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

2. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , удовлетворяющий следующим условиям:

- а) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , отсчитывается против движения часовой стрелки;
- б) вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} ;

в) векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} образуют систему трех векторов.

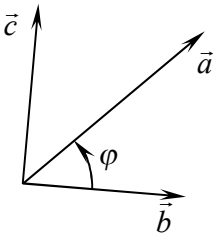


Рисунок 1

Обозначается векторное произведение:

$$\vec{a} \times \vec{b} \text{ или } [\vec{a}, \vec{b}].$$

Геометрически векторное произведение представлено на рисунке 1.

Основные свойства векторного произведения

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
2. $[\alpha \vec{a}, \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}]$.
3. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$.

Векторное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны.

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0, \quad \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

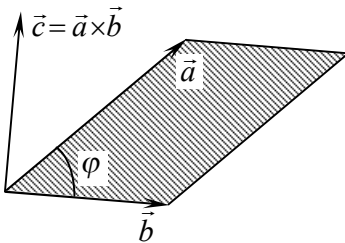


Рисунок 2

С геометрической точки зрения модуль векторного произведения соответствует площади параллелограмма, построенного на этих векторах, как на сторонах (рис. 2):

$$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = |[\vec{a}, \vec{b}]|.$$

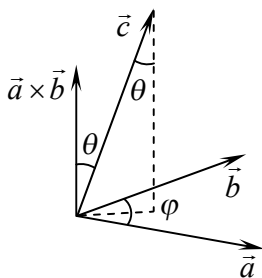
В ортонормированном базисе векторное произведение равно

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

3. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Смешанное произведение векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} равно числу, которое получается при скалярном умножении одного из данных векторов на векторное произведение двух других.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$



Обозначается смешанное произведение как $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Геометрически смешанное произведение представлено на рисунке 3.

Рисунок 3

Основные свойства смешанного произведения

1. циклическая перестановка сомножителей не меняет знак произведения:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}.$$

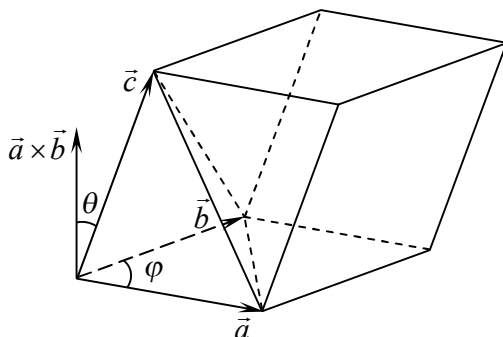
2. знак произведения меняется на противоположный при перестановке только двух множителей:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}.$$

3. смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители компланарны:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0, \text{ если } \vec{a} = 0, \text{ или } \vec{b} \times \vec{c} = 0.$$

Модуль смешанного произведения $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах $V = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (рис. 4).



$$V_{\text{параллелепипеда}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} V_{\text{параллелепипеда}} = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Рисунок 4

В ортонормированном базисе, где векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} имеют координаты (a_x, a_y, a_z) , (b_x, b_y, b_z) и (c_x, c_y, c_z) смешанное произведение равно

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Необходимое и достаточное условие компланарности векторов записывают так:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

ПРИМЕР КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 3
Векторная алгебра. Действия над векторами

ЗАДАНИЕ 1. Заданы точки $A(4, -2, 3)$, $B(5, -3, 1)$, $C(-4, 7, 1)$.

Найдите косинус угла между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .

ЗАДАНИЕ 2. Векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} заданы своими проекциями $\overrightarrow{AB}\{1, -1, 2\}$ и $\overrightarrow{AC}\{-8, 9, -2\}$. Найдите площадь параллелограмма, образованного векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .

ЗАДАНИЕ 3. Вычислите объем пирамиды с вершинами в точках $A(4, -2, 3)$, $B(5, 1, -3, 1)$, $C(-4, 7, 1)$, $D(-1, 7, 5)$ и найдите высоту, опущенную из вершины A на грань BCD .

ЗАДАНИЕ 4. Задана сила $\vec{F}\{-5, 4, 7\}$ и точки $A(2, -3, 4)$, $B(9, 10, 7)$. Найдите работу силы \vec{F} при прямолинейном перемещении точки ее приложения из положения $A(2, -3, 4)$ в положение $B(9, 10, 7)$.

ЗАДАНИЕ 5. Найдите направляющие косинусы вектора

$$\vec{a} = 6\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}.$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 3
Векторная алгебра. Действия над векторами

ЗАДАНИЕ 1. Заданы точки $A(4, -2, 3)$, $B(5, -3, 1)$, $C(-4, 7, 1)$.

Найдите косинус угла между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .

РЕШЕНИЕ

Запишем скалярное произведение векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).$$

Из этого выражения найдем

$$\cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}.$$

Чтобы найти проекции вектора \overrightarrow{AB} , из координат его конца $B(5, -3, 1)$ вычтем координаты его начала $A(4, -2, 3)$. Мы получаем вектор \overrightarrow{AB} заданный своими проекциями $\overrightarrow{AB}\{1, -1, -2\}$.

Аналогично найдем проекции вектора $\overrightarrow{AC}\{-8, 9, -2\}$.

Если векторы заданы проекциями, то скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих проекций заданных векторов.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -8 - 9 + 4 = -13.$$

Модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{149}.$$

$$\cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \frac{-13}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{149}}.$$

ОТВЕТ. $\cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \frac{-13}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{149}}.$

ЗАДАНИЕ 2. Векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} заданы своими проекциями $\overrightarrow{AB}\{1, -1, 2\}$ и $\overrightarrow{AC}\{-8, 9, -2\}$. Найдите площадь параллелограмма, образованного векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .

РЕШЕНИЕ. Площадь параллелограмма, построенного на векторах \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} равна

$$S_{\text{пар.}} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Найдем векторное произведение

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}.$$

Раскроем определитель по элементам первой строки, получим

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -8 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} = 20\vec{i} + 18\vec{j} + \vec{k}.$$

Найдем модуль векторного произведения: $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{725}$.

Площадь параллелограмма равна $\sqrt{725}$.

ОТВЕТ. Площадь параллелограмма равна $\sqrt{725}$.

ЗАДАНИЕ 3. Вычислите объем пирамиды с вершинами в точках $A(4, -2, 3)$, $B(5, 1, -3, 1)$, $C(-4, 7, 1)$, $D(-1, 7, 5)$ и найдите высоту, опущенную из вершины A на грань BCD .

РЕШЕНИЕ. Объем параллелепипеда, основанного на векторах \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{BD} , есть модуль их смешанного произведения

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \begin{vmatrix} BA_x & BA_y & BA_z \\ BC_x & BC_y & BC_z \\ BD_x & BD_y & BD_z \end{vmatrix}.$$

Найдем проекции векторов:

$$\begin{aligned}(BA)_x &= 4 - 5 = -1, & (BA)_y &= -2 - (-3) = 1, & (BA)_z &= 3 - 1 = 2; \\ (BD)_x &= -4 - 5 = -9, & (BD)_y &= 7 - (-3) = 10, & (BD)_z &= 1 - 1 = 0; \\ (BC)_x &= -1 - 5 = -6, & (BC)_y &= 7 - (-3) = 10, & (BC)_z &= 5 - 1 = 4.\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BA}\{-1, 1, 2\}, \overrightarrow{BC}\{-9, 10, 0\}, \overrightarrow{BD}\{-6, 10, 4\}.$$

Вычислим значение смешанного произведения векторов.

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -9 & 10 & 0 \\ -6 & 10 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -9 & 0 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -9 & 10 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = -40 + 36 - 60 = -64.$$

$$\text{Найдем объем параллелепипеда } V_{\text{пар.}} = |(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD})| = 64.$$

$$\text{Объем пирамиды равен } V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар.}} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}.$$

$$\text{Высоту пирамиды найдем из формулы } V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H_{\text{пир.}}.$$

$$\text{Откуда высота пирамиды равна } H_{\text{пир.}} = \frac{3V_{\text{пир.}}}{S_{\text{осн.}}}.$$

Основание пирамиды – это $\triangle BCD$, а его площадь равна $\frac{1}{2}$ модуля векторного произведения векторов \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{BD} .

Запишем векторное произведение векторов \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{BD} .

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -9 & 10 & 0 \\ -6 & 10 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -9 & 0 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -9 & 10 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = 40\vec{i} + 36\vec{j} - 30\vec{k}.$$

Найдем площадь основания и высоту пирамиды.

$$|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}| = \sqrt{40^2 + 36^2 + (-30)^2} = \sqrt{3796}, \quad S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}| = \frac{1}{2} \sqrt{3796}.$$

$$H_{\text{пир.}} = \frac{3V_{\text{пир.}}}{S_{\text{осн.}}} = \frac{64}{\sqrt{3796}}.$$

$$\text{ОТВЕТ. } V_{\text{пир.}} = \frac{32}{3}, \quad H_{\text{пир.}} = \frac{64}{\sqrt{3796}}.$$

ЗАДАНИЕ 4. Задана сила $\vec{F}\{-5, 4, 7\}$ и точки $A(2, -3, 4)$, $B(9, 10, 7)$.

Найдите работу силы \vec{F} при прямолинейном перемещении точки ее приложения из положения $A(2, -3, 4)$ в положение $B(9, 10, 7)$.

РЕШЕНИЕ. Работу силы \vec{F} можно записать как скалярное произведение вектора \vec{F} на вектор перемещения \vec{AB} , то есть $A_1 = \vec{F} \cdot \vec{AB}$. Запишем вектор \vec{AB} через его координаты $\vec{AB}\{7, 13, 3\}$. Тогда работа силы \vec{F} при перемещении будет равна:

$$A_1 = \vec{F} \cdot \vec{AB} = -5 \cdot 7 + 4 \cdot 13 + 7 \cdot 3 = 38.$$

ОТВЕТ. $A_1 = 38$.

ЗАДАНИЕ 5. Найдите направляющие косинусы вектора

$$\vec{a} = 6\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}.$$

РЕШЕНИЕ. Если α , β , γ – это углы, которые вектор \vec{a} образует с координатными осями, то $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ называются направляющими косинусами вектора \vec{a} . Известно, что они равны отношению соответствующих координат вектора к модулю этого вектора. Найдем модуль вектора.

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-4)^2} = \sqrt{101}.$$

$$\text{Тогда, } \cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{101}}, \cos \beta = \frac{7}{\sqrt{101}}, \cos \gamma = \frac{-4}{\sqrt{101}}.$$

$$\text{ОТВЕТ. } \cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{101}}, \cos \beta = \frac{7}{\sqrt{101}}, \cos \gamma = \frac{-4}{\sqrt{101}}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3
Векторная алгебра. Действия над векторами
Варианты заданий

ЗАДАНИЕ 1. Заданы точки $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$.

Найдите косинус угла между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .

1. $A(1, -2, 3)$, $B(0, 1, -2)$, $C(3, -4, 5)$.
2. $A(0, -3, 6)$, $B(-1, 2, -3)$, $C(-9, -3, 6)$.
3. $A(3, 3, -1)$, $B(5, -5, -2)$, $C(4, 1, 1)$.
4. $A(-1, 2, -3)$, $B(3, 4, -6)$, $C(1, 1, -1)$.
5. $A(-4, -2, 0)$, $B(-1, -4, 2)$, $C(3, -2, 1)$.
6. $A(5, 3, -1)$, $B(5, 2, 0)$, $C(6, 4, -1)$.
7. $A(-3, -7, -5)$, $B(0, -1, -2)$, $C(2, 3, 0)$.
8. $A(0, 2, -2)$, $B(3, 1, 2)$, $C(4, 1, 1)$.
9. $A(2, -4, 6)$, $B(0, -2, 4)$, $C(4, 0, 1)$.
10. $A(3, 3, -1)$, $B(1, 5, -2)$, $C(4, 7, 2)$.

ЗАДАНИЕ 2. Заданы векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} . Найдите площадь параллелограмма, образованного векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .

1. $\overrightarrow{AB}\{-1, 3, -5\}$, $\overrightarrow{AC}\{5, -2, 2\}$.
2. $\overrightarrow{AB}\{-12, 9, -3\}$, $\overrightarrow{AC}\{-9, 0, 0\}$.
3. $\overrightarrow{AB}\{2, -8, 1\}$, $\overrightarrow{AC}\{1, -2, 2\}$.
4. $\overrightarrow{AB}\{4, 2, -3\}$, $\overrightarrow{AC}\{2, -1, 2\}$.
5. $\overrightarrow{AB}\{3, -2, 2\}$, $\overrightarrow{AC}\{7, 0, 1\}$.
6. $\overrightarrow{AB}\{0, -1, 1\}$, $\overrightarrow{AC}\{1, 1, 0\}$.
7. $\overrightarrow{AB}\{3, 6, 3\}$, $\overrightarrow{AC}\{5, 10, 5\}$.
8. $\overrightarrow{AB}\{3, -1, 4\}$, $\overrightarrow{AC}\{4, -1, 3\}$.
9. $\overrightarrow{AB}\{-2, 2, -1\}$, $\overrightarrow{AC}\{1, 4, 3\}$.
10. $\overrightarrow{AB}\{3, 6, 3\}$, $\overrightarrow{AC}\{5, 10, 5\}$.

ЗАДАНИЕ 3. Вычислите объем пирамиды с вершинами в точках

$A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$, $D(d_1, d_2, d_3)$ и найдите высоту, опущенную из вершины A на грань BCD .

1. $A(1, -2, 3)$, $B(0, 1, -2)$, $C(3, -4, 5)$, $D(-1, 2, 1)$.
2. $A(0, -3, 6)$, $B(1, 2, -3)$, $C(-9, -3, 6)$, $D(0, 1, 1)$.
3. $A(3, 3, -1)$, $B(5, -5, -2)$, $C(4, 1, 1)$, $D(-1, 3, -2)$.
4. $A(-1, 2, -3)$, $B(3, 4, -6)$, $C(1, 1, -1)$, $D(0, 1, 2)$.
5. $A(-4, -2, 0)$, $B(-1, -4, 2)$, $C(3, -2, 1)$, $D(1, 4, 1)$.
6. $A(5, 3, -1)$, $B(5, 2, 9)$, $C(6, 4, -1)$, $D(0, -2, 3)$.
7. $A(-3, -7, -5)$, $B(0, -1, -2)$, $C(2, 3, 0)$, $D(4, 1, 2)$.
8. $A(0, 2, -2)$, $B(3, 1, 2)$, $C(4, 1, 1)$, $D(-1, 2, 5)$.
9. $A(2, -4, 6)$, $B(0, -2, 4)$, $C(4, 0, 1)$, $D(6, -8, 0)$.
10. $A(3, 3, -1)$, $B(1, 5, -2)$, $C(4, 7, 2)$, $D(2, 1, 5)$.

ЗАДАНИЕ 4. Задана сила \vec{F} и точки $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$.
Найдите работу силы \vec{F} при прямолинейном перемещении точки ее приложения из положения A в положение B .

1. $\vec{F}\{3, -2, 5\}$, $A(2, -3, 4)$, $B(1, 2, 7)$.
2. $\vec{F}\{1, 2, 1\}$, $A(4, 1, 2)$, $B(3, -2, 1)$.
3. $\vec{F}\{0, 1, 2\}$, $A(2, -3, 5)$, $B(3, -2, 7)$.
4. $\vec{F}\{2, -3, 2\}$, $A(1, -1, 2)$, $B(3, 2, 1)$.
5. $\vec{F}\{3, -2, 1\}$, $A(1, 4, 5)$, $B(1, -2, 7)$.
6. $\vec{F}\{-2, 1, 1\}$, $A(3, -1, 5)$, $B(4, -2, 3)$.
7. $\vec{F}\{3, 1, 1\}$, $A(1, -3, -4)$, $B(0, 2, 1)$.
8. $\vec{F}\{4, -1, 1\}$, $A(5, -3, 3)$, $B(4, 0, 2)$.
9. $\vec{F}\{2, -1, 8\}$, $A(5, -3, 5)$, $B(6, -4, 3)$.

10. $\vec{F}\{2, -1, 3\}$, $A(-6, 4, 2)$, $B(3, 2, 1)$.

ЗАДАНИЕ 5. Найдите направляющие косинусы вектора \vec{F} .

1. $\vec{F}\{3, -2, 5\}$. 2. $\vec{F}\{1, 2, 1\}$. 3. $\vec{F}\{0, 1, 2\}$. 4. $\vec{F}\{2, -3, 2\}$.

5. $\vec{F}\{3, -2, 1\}$. 6. $\vec{F}\{-2, 1, 1\}$. 7. $\vec{F}\{3, 1, 1\}$. 8. $\vec{F}\{4, -1, 1\}$.

9. $\vec{F}\{2, -1, 8\}$. 10. $\vec{F}\{2, -1, 3\}$.

Расчетно-графическое задание 1

- П Р И М Е Р Р А С Ч Е Т Н О - Г Р А Ф И Ч Е С К О Г О задания (РГЗ) 1.

Решение систем линейных алгебраических уравнений.

Решение инженерных и экономических задач

- П Р И М Е Р Р Г З 1

- П Р И М Е Р Р Е Ш Е Н И Я Р Г З 1

- Р А С Ч Е Т Н О - Г Р А Ф И Ч Е С К О Е ЗАДАНИЕ 1.
Варианты заданий

ПРИМЕР РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ (РГЗ) 1
Решение систем линейных алгебраических уравнений.
Решение инженерных и экономических задач

ЗАДАНИЕ 1. Решите систему линейных уравнений двумя способами:

- а) при помощи определителей по формулам Крамера;
- б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

ЗАДАНИЕ 2. Исследуйте систему уравнений, и в случае совместности, найдите её решение.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

ЗАДАНИЕ 3. Для изготовления трех видов продукции A_1 , A_2 , A_3 необходимо три вида сырья C_1 , C_2 , C_3 . При этом для изготовления одной единицы продукции A_1 необходимо: 4 единицы сырья C_1 , 3 единицы сырья C_2 и 3 единицы сырья C_3 . Для изготовления одной единицы продукции A_2 необходимо: 3 единицы сырья C_1 , 4 единицы сырья C_2 и 5 единиц сырья C_3 . Для изготовления одной единицы продукции A_3 необходимо: 1 единица сырья C_1 , 2 единицы сырья C_2 и 3 единицы сырья C_3 . На складе запас сырья C_1 составляет 440 единиц, запас сырья C_2 – 410 единиц, а запас сырья C_3 – 460 единиц. Сколько единиц продукции можно изготовить, если использовать весь запас сырья C_1 , C_2 , C_3 ?

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ РГЗ 1

Решение систем линейных алгебраических уравнений. Решение инженерных и экономических задач

ЗАДАНИЕ 1. Решите систему линейных уравнений двумя способами:

- а) при помощи определителей по формулам Крамера;
- б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

1. Метод Крамера

Найдем определители Δ , Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-4) - (-4) \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-3) \cdot 2 =$$
$$= 8 - 27 + 4 + 24 - 6 - 6 = -3, \quad (\Delta \neq 0);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot (-4) - (-4) \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 2 - (-1) \cdot (-3) \cdot 5 =$$
$$= 20 - 18 + 12 + 16 - 18 - 15 = -3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-4) - (-4) \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) \cdot 2 =$$
$$= 12 - 45 - 8 + 36 - 10 + 12 = -3;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \cdot 3 =$$
$$8 + 27 - 5 - 30 - 6 + 6 = 0.$$

Решение запишем по формулам Крамера:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1, \quad \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1, \quad \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{0}{-3} = 0.$$

ОТВЕТ. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$.

2. МЕТОД ГАУССА

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении переменных и приведении системы к треугольному виду.

Поменяем местами второе и первое уравнения и запишем систему в виде

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases} \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} -2-3 \\ \leftarrow \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} \leftarrow \end{array} \right. \end{array}$$

Исключим x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого первое уравнение умножим на (-2) и сложим со вторым уравнением. Затем первое уравнение умножим на (-3) и сложим с третьим уравнением. Получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ -x_2 + 2x_3 = -1, \\ -7x_2 + 11x_3 = -7. \end{cases} \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} -7 \\ \leftarrow \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{l} \leftarrow \end{array} \right. \end{array}$$

Исключим x_2 из третьего уравнения. Для этого второе уравнение умножим на (-7) и сложим с третьим уравнением. Получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_2 - 2x_3 = 1, \\ -3x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 + 3x_3, \\ x_2 = 1 + 2x_3, \\ x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Результат $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$ совпадает с полученным решением по методу Крамера.

ОТВЕТ. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$.

ЗАДАНИЕ 2. Исследуйте систему уравнений, и в случае совместности, найдите её решение.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

Выясним совместность системы, для этого составим расширенную матрицу $A|Q$ и преобразуем ее.

$$A|Q = \left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \xrightarrow{-2-1} \\ \xleftarrow{2} \\ \xleftarrow{1} \end{array} =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -22 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \xrightarrow{-2} \\ \xleftarrow{0} \\ \xleftarrow{0} \end{array} = \left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Найдем $\text{rang } A$ матрицы A и $\text{rang } A|Q$ расширенной матрицы $A|Q$. Преобразованная матрица имеет две ненулевые строки, поэтому ранг матриц A и $A|Q$ не может быть больше двух.

Отбрасывание нулевой строки не меняет ранга матрицы. Минор второго порядка матрицы A

$$M_2 = \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} = 55 - 56 = -1 \neq 0,$$

поэтому $\text{rang } A = 2$.

Минор второго порядка матрицы $A|Q$ – это

$$M_2 = \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 11 = -11 \neq 0,$$

поэтому $\text{rang } A|Q = 2$.

Значит, $\text{rang } A = \text{rang } A|Q$, и система совместна.

Мы выполняли преобразования строк исходной системы, поэтому исходная система уравнений равносильна следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Это базисная система уравнений. Найдем базисные неизвестные x_3 и x_4 . Для этого выразим их через свободные неизвестные x_1 и x_2 .

$$\begin{cases} 5x_3 - 7x_4 = 1 - 2x_1 + 3x_2, \\ 8x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Применим формулы Крамера и найдем общее решение системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 - 2x_1 + 3x_2 & 7 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = -22x_1 + 33x_2 + 11,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 - 2x_1 + 3x_2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 16x_1 - 24x_2 - 8,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 22x_1 - 33x_2 - 11, \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = -16x_1 + 24x_2 + 8.$$

Общее решение системы, где базисные неизвестные x_3 и x_4 выражены через свободные неизвестные x_1 и x_2 , будет таким:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 22x_1 - 33x_2 - 11 \\ -16x_1 + 24x_2 + 8 \end{pmatrix}.$$

ОТВЕТ. Система уравнений имеет множество решений. Общее решение можно записать в виде матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 22x_1 - 33x_2 - 11 \\ -16x_1 + 24x_2 + 8 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ 3. Для изготовления трех видов продукции A_1, A_2, A_3 необходимо три вида сырья C_1, C_2, C_3 . При этом для изготовления одной единицы продукции A_1 необходимо: 4 единицы сырья C_1 , 3 единицы сырья C_2 и 3 единицы сырья C_3 . Для изготовления одной единицы продукции A_2 необходимо: 3 единицы сырья C_1 , 4 единицы сырья C_2 и 5 единиц сырья C_3 . Для изготовления одной единицы продукции A_3 необходимо: 1 единица сырья C_1 , 2 единицы сырья C_2 и 3 единицы сырья C_3 . На складе запас сырья C_1 составляет 440 единиц, запас сырья C_2 – 410 единиц, а запас сырья C_3 – 460 единиц.

Сколько единиц продукции можно изготовить, если использовать весь запас сырья C_1, C_2, C_3

РЕШЕНИЕ. Обозначим объем выпуска продукции вида A_1 через x_1 , вида A_2 через x_2 , вида A_3 через x_3 .

Решение задачи удобно начинать с составления таблицы. Запишем условие задачи в таблицу 3.

Таблица 3

Вид сырья \ Вид продукции	A_1	A_2	A_3	Запас сырья
	на единицу продукции			
C_1	4	3	1	440
C_2	3	4	2	410
C_3	3	5	3	460
Объем выпуска продукции	x_1	x_2	x_3	

Составим математическую модель примера.

Сырье C_1 мы будем расходовать, чтобы получать $4x_1$ единиц продукции A_1 , $3x_2$ единиц продукции A_2 и $1x_3$ единиц продукции A_3 . Всего запас сырья C_1 равен 440 единицам:

$$4x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 440.$$

Получим такие же уравнения по расходу сырья C_2 и C_3 .

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 410,$$

$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 460.$$

Система алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 440, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 410, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 460 \end{cases}$$

вместе с условиями, что $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ является математической моделью задачи.

Запишем полученную систему уравнений в матричной форме $A \cdot X = Q$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Матрица} \\ \text{норм расхода} \\ \text{сырья.} \end{array} \quad Q = \begin{bmatrix} 440 \\ 410 \\ 460 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Матрица} \\ \text{(вектор)} \\ \text{запаса сырья.} \end{array}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Матрица} \\ \text{(вектор)} \\ \text{неизвестных.} \end{array} \quad A|Q = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 440 \\ 3 & 4 & 2 & 410 \\ 3 & 5 & 3 & 460 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Расширенная} \\ \text{матрица.} \end{array}$$

Решим полученную систему уравнений методом Жордана-Гаусса или методом полного исключения переменных (табл. 4).

Таблица 4

Столбец \ Строка	1 (x_1)	2 (x_2)	3 (x_3)	4 (q)
1	$a_{11} = 4$	$a_{12} = 3$	$a_{13} = 1$	$q_1 = 440$
2	$a_{21} = 3$	$a_{22} = 4$	$a_{23} = 2$	$q_2 = 410$
3	$a_{31} = 3$	$a_{32} = 5$	$a_{33} = 3$	$q_3 = 460$

Выберем ведущим элементом $a_{11} = 4$. Разделим каждый элемент первой строки на 4 (табл. 4). Результат запишем в строку 1 таб-

лицы 5. Вторую и третью строки таблицы 4 перепишем без изменений в таблицу 5.

Таблица 5

1 строка	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	110
2 строка	3	4	2	80
3 строка	3	5	3	130

Строки 1 (табл. 5) перепишем в строку 1 (табл. 6). Умножим каждый элемент строки 1 на (-3) (табл. 5). Полученные элементы последовательно сложим с элементами строки 2. Результат запишем в строку 2 (табл. 6). Потом элементы строки 1, умноженные на (-3) , последовательно сложим с элементами строки 3 (табл. 5). Результат запишем в строку 3 (табл. 6).

Таблица 6

1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	110
2	0	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{4}$	80
3	0	$\frac{11}{4}$	$\frac{9}{4}$	130

В полученной таблице выберем ведущим элементом $a_{22} = \frac{7}{4}$. Разделим на него каждый элемент строки 2 (табл. 6). Результат запишем в новую строку 2 таблицы 7. Строки 1 и 3 не изменяем (табл. 7).

Таблица 7

1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	110
2	0	1	$\frac{5}{7}$	$\frac{320}{7}$
3	0	$\frac{11}{4}$	$\frac{9}{4}$	130

Умножим каждый элемент строки 2 (табл. 7) на $\left(-\frac{3}{4}\right)$ и

сложим со строкой 1. Результат запишем в строку 1 (табл. 8). Умножим каждый элемент строки 2 на $\left(-\frac{11}{4}\right)$, сложим со строкой 3 (табл.7). Результат запишем в строку 3 (табл. 8).

Таблица 8

1	1	0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{530}{7}$
2	0	1	$\frac{5}{7}$	$\frac{320}{7}$
3	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{30}{7}$

Сложим элементы строки 1 с элементами строки 3 (табл. 8). Результат запишем в строку 1 (табл. 9). Разделим элементы строки 3 на $\left(\frac{2}{7}\right)$. Результат запишем в строку 3 (табл. 9). Строку 2 перепишем без изменения в таблицу 9.

Таблица 9

1	1	0	0	80
2	0	1	$\frac{5}{7}$	$\frac{320}{7}$
3	0	0	1	15

Умножим элементы строки 3 на $\left(-\frac{5}{7}\right)$ и сложим с элементами строки 2 (табл. 9). Результат запишем в строку 2 (табл. 10). Строки 1 и 2 перепишем без изменения в таблицу 10.

Таблица 10

1	1	0	0	80
2	0	1	0	35
3	0	0	1	15

Мы получили упрощенную матрицу. Вид упрощенной расширенной матрицы показывает, что $\text{rang } A = \text{rang}(A|Q) = 3$. Ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы и равен числу неизвестных.

Система уравнений имеет единственное решение $x_1 = 80$, $x_2 = 35$, $x_3 = 15$:

$$X = \begin{pmatrix} 80 \\ 35 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Проведем анализ решения. Получено единственное решение. Чтобы использовать все сырье, необходимо изготовить 80 единиц продукции первого вида, 35 единиц продукции второго вида и 15 единиц – третьего вида.

ПРОВЕРКА

$$\begin{cases} 4 \cdot 80 + 3 \cdot 35 + 1 \cdot 15 = 440, \\ 3 \cdot 80 + 4 \cdot 35 + 2 \cdot 15 = 410, \\ 3 \cdot 80 + 5 \cdot 35 + 3 \cdot 15 = 460. \end{cases}$$

Задача решена правильно.

ОТВЕТ. $x_1 = 80$, $x_2 = 35$, $x_3 = 15$.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ (РГЗ) 1
Решение систем линейных алгебраических уравнений.
Решение инженерных и экономических задач
Варианты заданий

ЗАДАНИЕ 1. Решите систему линейных уравнений двумя способами:

- а) при помощи определителей по формулам Крамера;
 б) методом Гаусса.

$$1. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_3 = 2, \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$$

ЗАДАНИЕ 2. Исследуйте систему уравнений и, в случае совместности, найдите её решение.

$$1. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

- $$\begin{array}{ll}
 3. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases} & 4. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases} \\
 5. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases} & 6. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases} \\
 7. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = -6, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases} & 8. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases} \\
 9. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases} & 10. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}
 \end{array}$$

ЗАДАНИЕ 3

- При пошиве изделий четырёх видов используются 3 ткани: ситец, сатин, шёлк. На единицу изделия I-го вида нужно: 1 м ситца и 4 м шёлка; для II-го вида – 1 м сатина и 2 м шёлка; для III-го вида – 2 м ситца и 3 м сатина; для IV-го вида – 1 м ситца, 2 м сатина и 4 м шёлка.

Запас тканей составляет 180 м ситца, 210 м сатина и 800 м шёлка. Сколько изделий всех видов можно изготовить, если использовать весь запас тканей?

- Завод изготавливает трансформаторы двух видов: **A** и **B**. На один трансформатор вида **A** используется 5 кг стального листа и 3 кг проволоки; вида **B** – 3 кг стального листа и 2 кг проволоки. В месяц завод может использовать 480 кг стального листа и 300 кг проволоки. Можно ли изготовить всего 100 транс-

форматоров за 1 месяц, чтобы использовать весь запас стального листа и проволоки?

3. При изготовлении детских костюмов и свитеров используется пряжа трёх цветов. Для детского костюма нужно 0,05 кг коричневой пряжи, 0,3 кг белой пряжи и 0,1 кг чёрной пряжи. Для свитера соответственно: 0,1 кг, 0,1 кг и 0,2 кг. Сколько детских костюмов и свитеров можно изготовить за одну смену, если запас пряжи на одну смену составляет: 20 кг коричневой пряжи, 50 кг белой пряжи, 40 кг черной пряжи, и всю ее нужно использовать. (Указание: перед решением полученной системы все уравнения умножить на 10).
4. На заводе изготовлено оборудование 3-х видов: молотки (O_1) – 95 единиц, дрели (O_2) – 100 единиц и пилы (O_3) – 185 единиц. Нужно перевезти это оборудование с завода в магазин, при этом в один автомобиль вида T_1 помещается 3 единицы O_1 , или 4 единицы O_2 , или 3 единицы O_3 . Если использовать автомобиль вида T_2 , то можно перевезти 2 единицы O_1 , или 1 единицу O_2 , или 5 единиц O_3 . Если использовать автомобиль вида T_3 , то можно перевезти 1 единицу O_1 , или 2 единицы O_2 или 4 единицы O_3 . Сколько автомобилей каждого вида нужно для перевозки всего оборудования?
5. Предприятие выпускает продукцию трех видов: A , B и C . В таблице 8 приведены нормы затрат и запасы ресурсов.

Таблица 8

Ресурс	Нормы затрат на единицу продукции			Запасы ресурсов
	A	B	C	
Сырье (кг)	5	7	4	24
Материалы (кг)	10	5	20	75
Оборудование (ед.)	5	2	1	10

Расчетно-графическое задание 1

Сколько единиц продукции можно изготовить, если использовать весь запас сырья A , B , C и полностью использовать все оборудование?

6. В таблице 9 указано содержание витаминов в 1 кг пищевых продуктов P_1 , P_2 , P_3 , P_4 .

Таблица 9

Витамины	Содержание в 1 кг				Потребности в витаминах
	P_1	P_2	P_3	P_4	
A	5	5	0	0	400
B	3	0	2	1	94
C	1	1	2	5	310

Составьте рацион питания так, чтобы полностью удовлетворить потребность во всех витаминах. (Рацион – это количество (кг) продуктов каждого вида).

7. Изготовление пиццы проводится по двум рецептам с одинаковыми продуктами, но в разных пропорциях (табл. 10).

Таблица 10

Продукты	Рецепт №1	Рецепт №2
Ветчина	70 %	65 %
Сыр	20 %	25 %
Оливки	10 %	10 %

Имеются в наличии для начинки: 3010 кг ветчины, 1040 кг сыра, 450 кг оливок (количество теста и специй – стандартно). Определите, какое количество порций можно изготовить по каждому рецепту, чтобы полностью использовать запасы ветчины, сыра и оливок.

8. На консервном заводе для овощей готовят маринады двух видов: слабокислые и кислые. Кроме специй и воды, обязательные компоненты: уксус, соль, сахар. На слабокислый маринад идет 150 г уксуса, 35 г соли и 60 г сахара на 3,5 стакана воды. На кислый маринад идет 200 г уксуса, 30 г соли и 45 г сахара на 3 стакана воды. В наличии имеется 510 кг ук-

суса, 99 кг соли и 162 кг сахара. Сколько порций по каждому рецепту можно изготовить из имеющегося сырья? Сколько воды потребуется для всей продукции?

9. Зависимость между токами и напряжениями параллельного соединения четырехполюсников представлена на рисунке 4

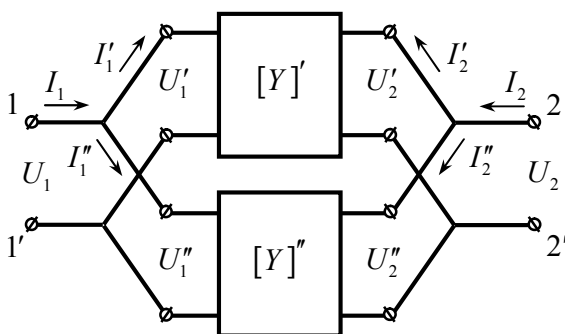


Рисунок 4

и описывается системами уравнений:

$$\begin{cases} U_1 = a_{11}U_2 + a_{12}I_2, \\ I_1 = a_{21}U_2 + a_{22}I_2; \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2, \\ I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2. \end{cases}$$

Покажите, что матрица $Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$ параллельного соединения четырехполюсников (рис.4) равна сумме матриц Y' и Y'' , т.е. $Y = Y' + Y''$.

10. На консервном заводе для овощей готовят маринады двух видов: слабокислые и кислые. Кроме специй и воды – обязательные компоненты: уксус, соль, сахар. На слабокислый маринад идет 150 г уксуса, 35 г соли и 60 г сахара на 3,5 стакана воды. На кислый маринад идет 200 г уксуса, 30 г соли и 45 г сахара на 3 стакана воды. В наличии имеется 340 кг уксуса, 66 кг соли и 108 кг сахара. Сколько порций по каждому рецепту можно изготовить из имеющегося сырья? Сколько воды потребуется для всей продукции?

Расчетно-графическое задание 2

- ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ 2. Задачи о прямой на плоскости. Построение кривых второго порядка. Решение задач с помощью прямой и кривых второго порядка
- ПРИМЕР РГЗ 2
- ПРИМЕР РЕШЕНИЯ РГЗ 2
- РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ 2. Варианты заданий

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ 2**

**Задачи о прямой на плоскости. Построение кривых
второго порядка. Решение задач экономического
содержания с помощью прямой и кривых второго порядка**

ЛИНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Общий вид уравнения линии первого порядка

$$Ax + By + C = 0.$$

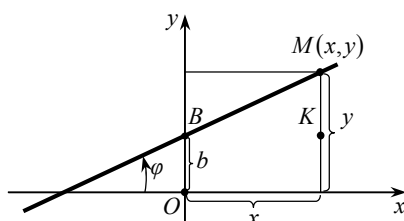


Рисунок 5

Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом (рисунок 5):

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi + b \quad \text{или}$$

$$y = kx + b, \quad \text{где}$$

$k = \operatorname{tg} \varphi$ – угловой коэффициент.

Уравнение прямой, которая проходит через заданную точку:

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$

Уравнение прямой линии, которая проходит через две точки:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Если прямая I параллельна прямой II, то $\varphi_1 = \varphi_2$, значит

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2, \text{ тогда } k_1 = k_2.$$

Если прямая I перпендикулярна прямой II, то угол между ними

$$\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \text{ тогда } k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Расстояние от точки $M(x_M, y_M)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ можно вычислить по формуле

$$d = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Общий вид уравнения кривых второго порядка:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Если $B = 0$, то общее уравнение кривой второго порядка можно привести к каноническому виду в системе координат XOY , параллельным переносом координат: $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$.

Начало координат системы XOY , совпадает с центром окружности, эллипса или гиперболы. Для параболы начало координат расположено в её вершине. Ниже приведены канонические уравнения этих кривых и соответствующие системы координат.

Виды некоторых линий второго порядка

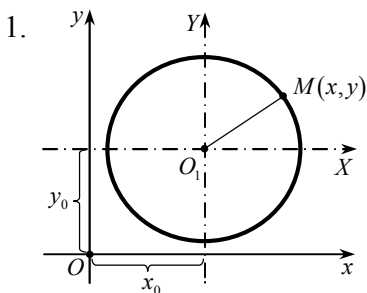


Рисунок 6

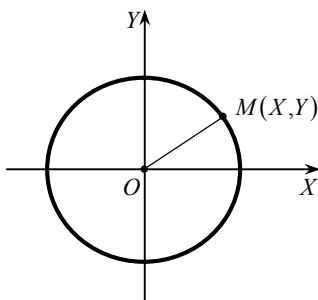


Рисунок 7

Окружность

$$A = C.$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

$O_1(x_0, y_0)$ – центр окружности (рис. 6).

O_1M – радиус окружности, равный R .

Каноническое уравнение окружности:

$$X^2 + Y^2 = R^2.$$

$O(0, 0)$ – центр окружности. (рис. 7).

OM – радиус окружности, равный R .

2.

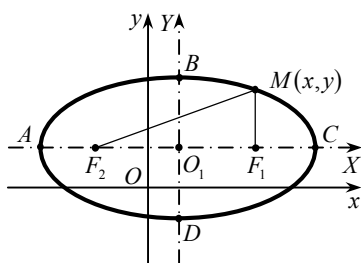


Рисунок 8

Эллипс

$A > 0, C > 0$ или $A < 0, C < 0$.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

$O_1(x_0, y_0)$ – центр эллипса
(рис. 8).

F_1, F_2 – фокусы эллипса.

O_1C – большая полуось, равная a .

O_1B – малая полуось, равная b .

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

$O(0, 0)$ – центр эллипса
(рис. 9).

F_1, F_2 – фокусы эллипса.

OC – большая полуось, равная a .

OB – малая полуось, равная b .

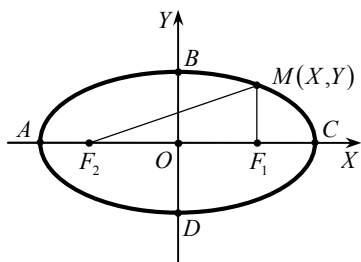


Рисунок 9

3.

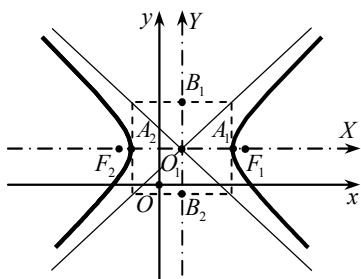


Рисунок 10

Гипербола

$A > 0, C < 0$ или $A < 0, C > 0$.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

$O_1(x_0, y_0)$ – центр симметрии
гиперболы – (рис. 10).

F_1, F_2 – фокусы гиперболы.

A_1, A_2 – вершины гиперболы.

O_1A_1 – полуось, равная a .

O_1B_1 – полуось равная b .

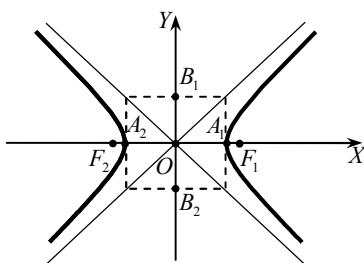


Рисунок 11

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

$O(0,0)$ – центр симметрии гиперболы (рис. 11).

F_1, F_2 – фокусы гиперболы.

A_1, A_2 вершины гиперболы.

OA_1 – полуось, равная a .

OB_1 – полуось, равная b .

4.

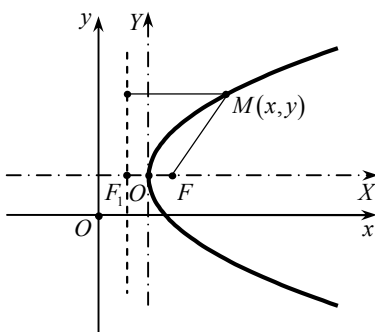


Рисунок 12

Парабола

$$A=0 \text{ или } C=0.$$

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

$O_1(x_0, y_0)$ – координаты вершины параболы (рис. 12).

$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – фокус параболы.

p – параметр параболы.

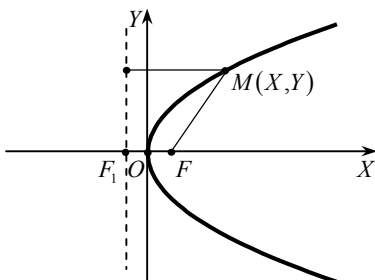


Рисунок 13

Каноническое уравнение параболы:

$$Y^2 = 2pX.$$

$O(0,0)$ – координаты вершины параболы (рис. 13).

$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – фокус параболы.

p – параметр параболы.

Таблица 11

Основные понятия кривых второго порядка

Кривые второго порядка	Эксцентриситет	Директрисы	Асимптоты	Фокусы кривых
Эллипс	$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$, где $c^2 = a^2 - b^2$	$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$	—	$F_2(-c, 0)$, $F_1(c, 0)$
Гипербола	$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$, где $c^2 = a^2 + b^2$	$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$F_2(-c, 0)$, $F_1(c, 0)$
Парабола	$\varepsilon = 1$	$x = -\frac{p}{2}$	—	$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
Окружность	$\varepsilon = 0$	—	—	—
a – большая полуось; b – малая полуось; c – расстояние от начала координат до фокуса кривой; p – параметр параболы (расстояние между фокусом и директрисой).				

Группировкой слагаемых и выделением полных квадратов для переменных x и y уравнение

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

приводят к одному из видов:

$$1) \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1;$$

$$2) \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1;$$

$$3) (y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

Затем, во всех случаях, переносом осей координат уравнения приводят к каноническому виду.

ПРИМЕР РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ (РГЗ) 2

ЗАДАНИЕ 1. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точки $M_1(-1, 1)$ и $M_2(1, 5)$.

ЗАДАНИЕ 2. Напишите уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой $y = 1 - 2x$ и проходит через точку $(2, -1)$.

ЗАДАНИЕ 3. Найдите расстояние от точки $M(2, -1)$ до прямой $y = 1 - 2x$.

ЗАДАНИЕ 4. Приведите уравнение линии $9x^2 - 16y^2 = 144$ к каноническому виду, постройте эту линию и, в зависимости от полученного результата, найдите:

- а) координаты центра окружности и его радиус;
- б) координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса;
- в) координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет гиперболы и запишите уравнение её асимптот;
- г) координаты вершины и фокуса параболы, величину параметра, а также уравнение её директрисы.

ЗАДАНИЕ 5. Расход бензина автобусом возрастает прямо пропорционально квадрату его скорости, причем при скорости 80 км/ч расход бензина за 1 час составляет 16 л. Определите приблизительно расход бензина за 1 час при скорости 100 км/ч.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ (РГЗ) 2

ЗАДАНИЕ 1. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точки $M_1(-1, 1)$ и $M_2(1, 5)$.

РЕШЕНИЕ. Подставим координаты данных точек в уравнение прямой, которая проходит через две заданные точки. Получим:

$$\frac{x+1}{1+1} = \frac{y-1}{5-1} \Rightarrow 4 \cdot (x+1) = 2 \cdot (y+1) \Rightarrow 2x - y + 3 = 0.$$

ОТВЕТ. $y = 2x + 3$.

ЗАДАНИЕ 2. Напишите уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой $y = 1 - 2x$ и проходит через точку $(2, -1)$.

РЕШЕНИЕ. Через точку $M(2, -1)$ проходит пучок прямых

$$y + 1 = k \cdot (x - 2).$$

Одна из этих прямых $y + 1 = k_1 \cdot (x - 2)$ будет перпендикулярна заданной прямой $y = -2x + 1$ с угловым коэффициентом $k_2 = -2$.

Из условия перпендикулярности этих прямых $k_1 \cdot k_2 = -1$ находим, что $k_1 = -\frac{1}{k_2} = \frac{1}{2}$.

Уравнение искомой прямой имеет вид:

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \text{ или } x - 2y - 4 = 0.$$

ОТВЕТ. $x - 2y - 4 = 0$.

ЗАДАНИЕ 3. Найдите расстояние от точки $M(2, -1)$ до прямой $y = 1 - 2x$.

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение прямой в общем виде $2x + y - 1 = 0$ и воспользуемся формулой

$$d = \frac{|2x_M + y_M - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}.$$

Расчетно-графическое задание 2

Подставим координаты точки $M(2, -1)$ в полученную формулу.

$$d = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

ОТВЕТ. $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

ЗАДАНИЕ 4. Приведите уравнение линии $9x^2 - 16y^2 = 144$ к каноническому виду, постройте эту линию и, в зависимости от полученного результата, найдите:

- а) координаты центра окружности и его радиус;
- б) координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса;
- в) координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет гиперболы и запишите уравнение её асимптот;
- г) координаты вершины и фокуса параболы, величину параметра, а также уравнение её директрисы.

РЕШЕНИЕ. Разделим левую и правую части уравнения на 144 и запишем уравнение в каноническом виде (рис. 14):

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

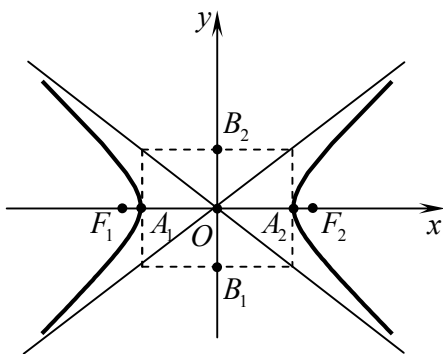


Рисунок 14

Это уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox , полуосью $a = 4$ и полуосью $b = 3$. Асимптоты гиперболы найдем по формуле $y = \pm \frac{b}{a}x$, в результате получим $y = \pm \frac{3}{4}x$.

Вершины гиперболы:

$$A_1(-4, 0), A_2(4, 0),$$

$$B_1(-3, 0), B_2(3, 0).$$

Эксцентриситет гиперболы:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \text{ или } \varepsilon = \frac{\sqrt{16+9}}{4} = \frac{5}{4} > 1.$$

Фокусы гиперболы имеют координаты:

$$F_1(-c, 0), F_2(c, 0), \text{ значит, } F_1(-5, 0), F_2(5, 0).$$

ОТВЕТ. Полученная кривая – это гипербола. $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$;

$$2a = 8, 2b = 6; \varepsilon = \frac{5}{4}; y = \pm \frac{3}{4}x.$$

ЗАДАНИЕ 5. Расход бензина автобусом возрастает прямо пропорционально квадрату его скорости, причем при скорости 80 км/ч расход бензина за 1 час составляет 16 л. Определите приблизительно расход бензина за 1 час при скорости 100 км/ч.

РЕШЕНИЕ. Построим график зависимости расхода бензина от скорости автобуса. Обозначим:

- y – расход бензина;
- x – скорость автобуса;
- k – коэффициент пропорциональности.

Получим из условия, что

$$y = k \cdot x^2.$$

Найдем коэффициент пропорциональности:

$$16 = k \cdot 80^2 \Rightarrow k = \frac{1}{400}.$$

Получим квадратичную зависимость: $y = \frac{1}{400}x^2$. Построим график этой функции при $x \geq 0$ (рис. 15).

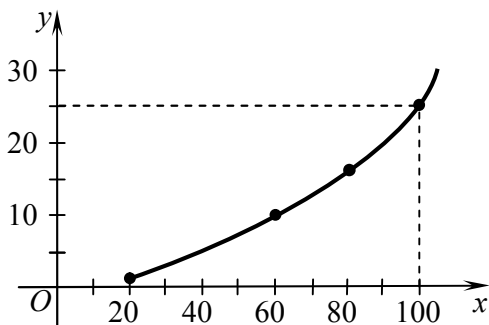


Рисунок 15

ОТВЕТ. Расход бензина приблизительно 25 л за час при скорости 100 км/ч.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ (РГЗ) 2
Варианты заданий

ЗАДАНИЕ 1. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точки M_1 и M_2 .

1. $M_1(3, 4)$ и $M_2(2, 6)$.
2. $M_1(5, 1)$ и $M_2(-2, -6)$.
3. $M_1(-3, -4)$ и $M_2(1, 4)$.
4. $M_1(3, -4)$ и $M_2(2, -6)$.
5. $M_1(-3, -4)$ и $M_2(-2, 6)$.
6. $M_1(9, 4)$ и $M_2(5, 6)$.
7. $M_1(7, 1)$ и $M_2(9, 3)$.
8. $M_1(1, 2)$ и $M_2(4, 6)$.
9. $M_1(2, 3)$ и $M_2(10, 4)$.
10. $M_1(-3, 1)$ и $M_2(6, 7)$.

ЗАДАНИЕ 2. Напишите уравнение прямой линии, которая проходит через точку A .

1. $A(1, 2)$ параллельно прямой $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.
2. $A(2, 3)$ параллельно прямой $2x + 3y = 6$.
3. $A(5, 7)$ параллельно прямой $y = 2x - 5$.
4. $A(2, 5)$ параллельно прямой $2x + 5y + 10 = 0$.
5. $A(3, 1)$ параллельно прямой $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$.
6. $A(-1, 2)$ параллельно прямой $3x + 5y - 15 = 0$.
7. $A(-1, 2)$ параллельно прямой $3x - 2y = 5$.
8. $A(-2, 3)$ параллельно прямой $2x - 7y = 2$.
9. $A(3, 4)$ параллельно прямой $4x - 3y = 1$.
10. $A(2, -1)$ параллельно прямой $5x - 4y = 3$.

ЗАДАНИЕ 3. Найдите расстояние от точки $M(x, y)$ до прямой.

1. $M(3, 4)$ до прямой $y = 2 - 3x$.
2. $M(-3, -4)$ до прямой $y = 2 + 3x$.

3. $M(1, 4)$ до прямой $y = 3x - 2$. 4. $M(2, 3)$ до прямой $y = 4 - 5x$.
5. $M(-3, 4)$ до прямой $y = 6 - 3x$. 6. $M(1, 2)$ до прямой $y = 4x + 1$.
7. $M(-2, 1)$ до прямой $y = 5x - 2$. 8. $M(1, 4)$ до прямой $3x + 2y = 7$.
9. $M(-2, 2)$ до прямой $5x - 2y = 3$. 10. $M(1, 2)$ до прямой $3x - 7y = 1$.

ЗАДАНИЕ 4. Приведите уравнение линии к каноническому виду, постройте эту линию и, в зависимости от полученного результата, найдите:

- а) координаты центра круга и его радиус;
- б) координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса;
- в) координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет гиперболы и запишите уравнение её асимптот;
- г) координаты вершины и фокуса параболы, величину параметра, а также уравнение её директрисы.

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$. | 2. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$. |
| 3. $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$. | 4. $x^2 + 4y^2 + 18 + 16y - 11 = 0$. |
| 5. $y^2 - 2x + 8y + 10 = 0$. | 6. $7x^2 - 2y^2 + 28x + 14 = 0$. |
| 7. $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$. | 8. $y^2 - 4y + 2x + 14 = 0$. |
| 9. $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$. | 10. $x^2 - 6x + 3y + 3 = 0$. |

ЗАДАНИЕ 5. Задачи.

1. Издержки производства на 10 единиц товара составляют 1000 грн.; на 50 единиц товара – 2000 грн. Определите издержки производства на 30 единиц товара, если известно, что издержки зависят от объема продукции линейно. Сколько единиц товара было выпущено, если издержки производства составили 1200 грн.?
2. Объем выпуска продукции фабрики (y тыс. штук) растет

при росте капиталовложений (x грн.) по закону $y^2 = 2px$. Определите объем капиталовложений, необходимый для выпуска 10^4 единиц продукции. Известно, что для выпуска 10^2 единиц продукции необходимо 2500 грн. капиталовложений.

3. Составьте уравнение прямой, которое отображает изменение урожайности 1 гектара в течение 17 лет, если в первый год с 1 гектара было собрано 9,1 центнера зерновых, а в последний – 21 центнер. Какой была урожайность на десятом году?
4. Пусть спрос D на некоторый товар зависит от его цены p : $D = \frac{2}{p}$, а предложение S записывают: $S = 2p^2$. Определить равновесную рыночную цену. (Равновесная рыночная цена – это цена на товар, при которой спрос на товар равен предложению).
5. Урожайность с 1 гектара поля возрастает прямо пропорционально квадрату количества использованных удобрений. Урожайность без использования удобрений составляет 10 центнеров с гектара. Известно, что наибольшая урожайность достигается при использовании 2 кг удобрений на 1 гектар, и она равна 20 центнерам с гектара. Какое количество удобрений на 1 гектар надо использовать, чтобы получить урожайность 18 центнеров с гектара?
6. Перевозка груза из пункта A в пункт B на расстояние 100 км стоит 200 грн., а из пункта A в пункт C на расстояние 400 км стоит 350 грн. Известно, что зависимость стоимости перевозки y от расстояния x – линейна. На какое наибольшее расстояние можно перевезти груз, если имеется 270 грн.?
7. Издержки производства 100 штук некоторого товара составляют 300 грн., а 500 штук – 600 грн. Определите издержки производства 400 штук товара при условии, что функция издержки линейна.
8. Прибыль от продажи 50 штук некоторого товара составляет

50 грн., 100 штук – 200 грн. Определите прибыль от продажи 500 штук товара при условии, что функция прибыли линейна.

9. Издержки перевозки двумя средствами транспорта выражаются функциями $y = 150 + 50x$ и $y = 250 + 25x$, где x – расстояние перевозки в сотнях километров, а y – транспортные расходы в денежных единицах. Определите, начиная с какого расстояния, более экономичным становится второе средство.
10. Прибыль от продажи некоторого товара в двух магазинах выражена функциями $y = -2 + 3x$ и $y = -3 + \frac{16x}{5}$, где:
- x – количество товара в сотнях штук;
 - y – прибыль в тысячах грн.

Определите, начиная с какого количества товара, продажа во втором магазине становится более выгодной.

Модульная контрольная работа 1

- П Р И М Е Р модульной
К О Н Т Р О Л Ь Н О Й РАБОТЫ 1
- Модульная контрольная работа 1.
Варианты заданий

ПРИМЕР МОДУЛЬНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 1

ЗАДАНИЕ 1. Составьте уравнение прямой линии, которая проходит через точку $A(1, 2)$ параллельно прямой $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

ЗАДАНИЕ 2. Приведите уравнение линии $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$ к каноническому виду, постройте эту линию и, в зависимости от полученного результата, найдите:

- координаты центра окружности и его радиус;
- координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса;
- координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет гиперболы и записать уравнение её асимптот;
- координаты вершины и фокуса параболы, величину параметра, а также уравнение её директрисы.

ЗАДАНИЕ 3. Решите систему уравнений при помощи обратной матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ 4. Методом Жордана-Гаусса приведите расширенную матрицу к упрощенному виду.

$$A|Q = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & -2 \end{array} \right].$$

ЗАДАНИЕ 5. Вычислите объем пирамиды с вершинами в точках $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$, $D(d_1, d_2, d_3)$ и найдите высоту, опущенную из вершины A на грань BCD , если $A(2, 1, -1)$, $B(6, -1, -4)$, $C(4, 2, 1)$, $D(-2, 3, 1)$.

МОДУЛЬНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1 Варианты заданий

ЗАДАНИЕ 1. Составьте уравнение прямой линии, которая проходит через точку A .

1. $A(3, 4)$. параллельно прямой $5x - 7y - 35 = 0$.

2. $A(3, -2)$ параллельно прямой $3x - 4y - 2 = 0$.

3. $A(2, 3)$ параллельно прямой $y = \frac{3}{2}x - 1$.

4. $A(3, 1)$ параллельно прямой $3x - 4y - 1 = 0$.

5. $A(-2, 3)$ параллельно прямой $-3x + 2y + 5 = 0$.

6. $A(3, 4)$ параллельно прямой $2x - 5y - 7 = 0$.

7. $A(-2, -1)$ параллельно прямой $3x - 2y - 4 = 0$.

8. $A(3, 1)$ параллельно прямой $2x + 5y - 1 = 0$.

9. $A(5, -1)$ перпендикулярно прямой $3x - 5y + 1 = 0$.

10. $A(2, 3)$ перпендикулярно прямой $4x - 3y + 2 = 0$.

ЗАДАНИЕ 2. Приведите уравнение линии к каноническому виду, постройте эту линию. В зависимости от полученного результата, найдите:

- а) координаты центра круга и его радиус;
- б) координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса;
- в) координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет гиперболы и записать уравнение её асимптот;
- г) координаты вершины и фокуса параболы, величину параметра, а также уравнение её директрисы.

1. $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$. 2. $y^2 - 6y + 4x + y + 9 = 0$.

3. $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 37 = 0$. 4. $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$.

5. $16x^2 + 4y^2 + 64x + 8y + 4 = 0$. 6. $y^2 + 4y - 8x + 12 = 0$.
 7. $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 39 = 0$. 8. $y^2 - 2y + 3x + 13 = 0$.
 9. $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 25 = 0$. 10. $x^2 - 4x + 2y + 10 = 0$.

ЗАДАНИЕ 3. Решите систему уравнений при помощи обратной матрицы (табл. 12).

Таблица 12

	A	X	Q		A	X	Q
1.	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix}$	2.	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix}$
3.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{vmatrix}$	4.	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 8 \\ 13 \\ 13 \end{vmatrix}$
5.	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -7 \end{vmatrix}$	6.	$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -4 \\ 6 \\ -9 \end{vmatrix}$
7.	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix}$	8.	$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \end{vmatrix}$
9.	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{vmatrix}$	10.	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{vmatrix}$

ЗАДАНИЕ 4. Методом Жордана-Гаусса привести расширенную матрицу к упрощенному виду.

1. $A|Q = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & -2 \end{array} \right]$.

2. $A|Q = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 14 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 11 \\ 4 & 4 & 2 & 5 & 15 \end{array} \right]$.

$$3. \ A|Q = \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 11 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & 10 \end{array} \right\|.$$

$$4. \ A|Q = \left\| \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right\|.$$

$$5. \ A|Q = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & -7 \end{array} \right\|.$$

$$6. \ A|Q = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & -7 \end{array} \right\|.$$

$$7. \ A|Q = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -6 \\ 2 & 3 & -4 & -8 \\ 3 & -1 & +5 & 10 \end{array} \right\|.$$

$$8. \ A|Q = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -6 \\ -3 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & 2 & -7 & -2 \end{array} \right\|.$$

$$9. \ A|Q = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 18 \\ 4 & -1 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & -2 & 13 \end{array} \right\|.$$

$$10. \ A|Q = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 9 \\ -2 & 4 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & -12 \end{array} \right\|.$$

ЗАДАНИЕ 5. Вычислите объем пирамиды с вершинами в точках $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$, $D(d_1, d_2, d_3)$ и найдите высоту, опущенную из вершины A на грань BCD .

$$1. \ A(2, 1, -1), \quad B(6, -1, -4), \quad C(4, 2, 1), \quad D(-2, 3, 1).$$

$$2. \ A(-1, -2, 1), \quad B(-4, -2, 5), \quad C(-8, 2, 6), \quad D(5, 0, 1).$$

$$3. \ A(6, 2, -3), \quad B(6, 3, -2), \quad C(7, 3, -3), \quad D(3, 2, -1).$$

$$4. \ A(0, 0, 4), \quad B(-3, -6, 1), \quad C(-5, -10, 1), \quad D(-4, 1, 0).$$

$$5. \ A(2, -8, -1), \quad B(4, -6, 0), \quad C(-2, -6, -1), \quad D(6, 0, 1).$$

$$6. \ A(3, -6, 9), \quad B(0, -3, -6), \quad C(6, 1, 2), \quad D(-7, 1, 0).$$

$$7. \ A(0, 2, -4), \quad B(8, 2, 2), \quad C(6, 2, 4), \quad D(2, -1, 0).$$

$$8. \ A(3, 3, -1), \quad B(5, 1, -2), \quad C(4, 1, 1), \quad D(-3, 1, 2).$$

$$9. \ A(-4, 3, 0), \quad B(0, 1, 3), \quad C(-2, 4, -2), \quad D(-2, 5, 1).$$

$$10. \ A(1, -1, 0), \quad B(-2, -1, 4), \quad C(8, -1, -1), \quad D(1, 2, 7).$$

Словарь

- Русский
- Английский
- Арабский
- Вьетнамский
- Китайский
- Туркменский
- Французский

РУССКО-АНГЛО-АРАБСКИЙ СЛОВАРЬ

Русский	Английский	Арабский
абсцисса	abscissa	الإحداثي السيني
алгебра	algebra	الجبر
алгебра матриц	algebra of matrix	الجبر مصفوفة
алгебраическое дополнение	algebraic complement	جبري التعبير
алгебраическое выражение	algebraic expression	المساعد العامل
алгебраическое уравнение	algebraic equation	جبرية معادلة
аргумент	argument	مقياس او اساس
асимптота	asymptote	محاذي
асимптота графика функций	asymptotes of hyperbola	الخطوط المقاربة من الهدلول
базис	base	أساس
базисная строка	basic row	خط الأساس
базисные переменные	basic variables	المتغيرات الاساسيه
базисный минор	basic minor	قاصر القاعدة
базисный минор матрицы	principal minor of matrix	الاساس الاصغر للمصفوفة
базисный столбец	basic column	العمود القاعدة
базисный столбец матрицы	basic column of matrix	العمود القاعدة للمصفوفة
бесконечно большая величина	indefinitely large value	القيمة العظمى المحليه
бесконечно малая величина	infinitesimal value	القيمة الصغرى المحليه
бесконечное множество	infinite set	مجموعه لا نهائيه
биссектриса треугольника	bisector of triangle	منصف مثلث
биссектриса угла	bisector	شطر
боковые стороны трапеции	lateral sides of trapezoid	جانبي شبه منحرف
в соответствие	in correspondence	في الامتثال
в частности	particularly	بخاصة

ведущий элемент	leading element	العنصر الاساسي
вектор	vector	متجهه
вектор в пространстве	vector in space	فضاء متجهي
вектор на плоскости	vector in plane	السطح على متجهه
векторное произведение	vector product	المتجهي الجداء
величина	value	قيمة
верное равенство	proper equality	متغير
вертикальная асимптота	vertical asymptote	الخط المقارب الرأسي
вертикальная прямая	vertical line	خط عمودي
верхний индекс	upper index	الدليل
вершина	vertex	قمة الرأس
вершина гиперболы	vertex of hyperbola	الجزء العلوي من القطع الزائد
вершина конуса	vertex of cone	قمة المخروط
вершина многогранника	vertex of polyhedron	قمة الرأس من متعدد الوجوه
вершина параболы	vertex of parabola	قمة الرأس من القطع المكافئ
вершина пирамиды	vertex of pyramid	قمة الهرم
вершина треугольника	vertex of triangle	قمة المثلث
вершина угла	vertex of angle	قمة الرأس من زاوية
ветви гиперболы	branches of hyperbola	القطع الزائد
возводить в степень	raising to a power	مساواة
вписанная окружность	inscribed circle	منقوش دورته
всегда	always	دائما
выделить полный квадрат	to separate complete square	تخصيص ساحة الكامل
выносить общий множитель за скобки	to take out of parentheses	جعل الأقواس
выражение	expression	التعبير
вырожденная матрица	singular matrix	المصفوفه الاحاديه
высота	height	ارتفاع
высота трапеции	height of trapezoid	ارتفاع شبه منحرف
высота треугольника	height of triangle	ارتفاع المثلث

вычитать	to subtract	خصم
вычисление	calculation	حساب
вычисление площади	calculation of area	مساحة حساب
вычисление элементов треугольника	calculation of triangle elements	حساب عناصر المثلث
вычислять	to calculate	حساب
геометрический	geometrical	الهندسي
геометрия	geometry	علم الهندسه
гипербола	hyperbola	القطع الزائد
гипотенуза	hypotenuse	وتر
гипотенуза треугольника	hypotenuse of triangle	وتر المثلث
главная диагональ	main (principal) diagonal	قطر المصفوفه الاساسي
горизонтальная асимптота	horizontal asymptote	الخط المقارب الأفقي
горизонтальная прямая	horizontal line	خط أفقي
градус	degree	قياس درجة من القوس
грань	edge	حافه / حد
декартова система координат	Cartesian coordinates system	النظام الديكارتي (الاحداث)
декартовы координаты	Cartesian coordinates	الاحداثيات الديكارتيه
делать подстановку	to do substitution	الاستبدال جعل
диагональ	diagonal	قطري
диагональ матрицы	diagonal of matrix	مصفوفة قطري
диагональ многоугольника	diagonal of polygon	قطري من مضلع
диагональ определителя	diagonal of determinant	المحددات قطري
диагональ параллелепипеда	diagonal of parallelepiped	قطري من متوازي
диагональ четырёхугольника	diagonal of quadrilateral	قطري من الرباعي
диагональная матрица	diagonal matrix	المصفوفه القطريه
диаметр	diameter	قطر
диаметр круга	diameter of circle	دائرة قطرها
диаметр окружности	diameter of circumference	محيط قطر
диаметр цилиндра	diameter of cylinder	الاسطوانة ابعاد
диаметр шара	diameter of sphere	ابعاد فلكة

директриса	directrix	الدليل
директриса гиперболы	directrix of hyperbola	الدليل غلو
директриса параболы	directrix of parabola	الدليل من القطع المكافئ
директриса эллипса	directrix of ellipse	دليل القطع الناقص
дискриминант	discriminator	التمييز
длина	length	طول
длина дуги	arc of length	طول القوس
длина катета	length of leg	طول الساق
длина ломаной	length of a broken line	طول الخط المكسور
длина окружности	length of circumference	طول محيط
длина отрезка	length of segment	القطعة طول
дополнение множества	addition of set	للعدد تكملة
дуга	arc	قوس منحنى
дуга кривой	arc of curve	قوس منحنى
дуга окружности	arc of circumference	محيط من قوس
единичная матрица	unit matrix	مصفوفة هوية
зависимая величина	dependent value	متغير تحميل
зависимость	dependence	اعتماد
задавать прямую уравнениями	to determine a line with equations	نسأل المعادلات المباشرة
заключать в скобки	to put in parentheses	دعم
закрывать скобки	to close parentheses	قوسين إغلاق
замена переменных	substitution of variables	تغيير المتغيرات
знак	sign (mathematical)	توقيع (الرياضيا)
значение	value	قيمة
значение неизвестного	value of unknown	قيمة المجهول
индекс	index	مؤشر
интервал	interval	المجال
иррациональное уравнение	irrational equation	معادلة غير جذرية
исключение	elimination	استثناء
исключение неизвестных (переменных)	elimination of unknowns (variables)	القضاء على المجاهيل (المتغيرات)
исследование	investigation	تحقيق

исследование функции	investigation of function	دراسة الدالة
каноническое уравнение	canonical equation	معادله صيغه/معادله قانون
касательная	tangent	المماس
касательная в точке перегиба кривой	tangent at an inflection point	المماس عند نقطة انعطاف المنحنى
касательная к графику функции	tangent to a graph of function	الظل الى رسم الدالة
касательная к окружности	tangent to a circumference	الظل الى محيط
касательная прямая	tangent line	خط المماس
катет	leg (of a triangle), cathetus	ضلع قائم
квадрат	square	شكل تربيعي
квадратичная форма	quadratic form	مصفوفة مربعة
квадратная матрица	square matrix	المصفوفة المربعة
квадратное уравнение	quadratic equation	معادلة من الدرجة الثانية
квадратные скобки	brackets	بين قوسين معقوفين
коллинеарный вектор	collinear vector	متجهة على خط واحد
компланарный вектор	coplanar vector	متجهة متحد المستوى
конец	end	نهاية
константа	constant	ثابت
координата	coordinate	النظام الاحداثي
координатная ось	axis of coordinate	المحور الاحداثي
координатная плоскость	coordinate plane	تنسيق السطح
координаты вектора	vector coordinates	إحداثيات متجه
координаты точки	coordinates of point	إحداثيات نقطة
косинус угла	cosine of angle	جيب تمام الزاوية
коэффициент	coefficient	معامل
коэффициент пропорциональности	coefficient of proportionality	عامل التناسب
кривая	curve	منحنى
кривая второго порядка	curve of the second order	منحنى من الدرجة الثانية
круг	circle	دائرة
круглые скобки	parentheses	الاقواس

круговой сегмент	circular segment	قطعة دائرية
круговой сектор	circular sector	قطاع دائري
линейное уравнение	linear equation	معادلة خطية
логарифмическое уравнение	logarithmic equation	المعادلة اللوجستية
ломаная (линия)	broken (line)	كسر خط (الخط)
луч	ray	شعاع
масштаб	scale	سلم
матрица	matrix	مصفوفة
матрица квадратичной формы	matrix of square form	مصفوفة على شكل الدرجة الثانية
матрица-столбец	column matrix	عمود المصفوف
матрица-строка	row matrix	صف المصفوفه
медиана	median	متوسط
метод (способ) подстановки	method of substitution	الطريقة (طريقة) الاستبدال
метод Гаусса	method of Gauss	طريقة كاوس
метод, способ	method	طريقه
минор	minor	قاصر
многоугольник	polygon	المضلع
наклонная	inclined line	ميل إلى
направление	direction	توجيه
начало отсчета	origin	المساواة كاذبة
неверное равенство	improper equality	قيمة مستقلة
независимая система	independent system	نظام مستقل
неизвестная	unknown	غير معروف
несовместная система	inconsistent system	نظام يتعارض
нижний индекс	subscript	مؤشر منخفض
нормаль	normal, perpendicular	طبيعي
образовывать	to generate	منخفض
обратная матрица	inverse matrix	مصفوفة عكسية
обратный	opposite	خلفي
обратный ход	inversion	انعكاس
объединение множеств	unit of sets	اتحاد مجموعات

объект	object	موضوع
однородная система	homogeneous system	نظام متجانس
окружность	circumference	دائرة
описанная окружность	circumscribed circle	وصف دائره
определение	definition	تعريف
определитель	determinant	المحدد
ортогональный	orthogonal	متعامد
основание	base	قاعدة
основание наклонной	base of inclined line	قاعدة مائل
основание перпендикуляра	base of perpendicular	سفق عمودي
основание трапеции	base of trapezoid	قاعدة المثلث
основание треугольника	base of triangle	قاعدة شبه منحرف
остаточный	residual	المتبقي
остроугольный треугольник	acute triangle	الزوايا حاد مثلث
ось	axis	محور
ось абсцисс	abscissa axis	المحور السيني
откладывать по оси абсцисс	to point on abscissa axis	تأجيل الإحداثي السيني
открывать скобки	to open parentheses	فتح قوس
относительный	relative	نسبي
отрезок	segment	قطعة مستقيم
парабола	parabola	القطع المكافئ
параллелограмм	parallelogram	متوازي الاضلاع
параллельные прямые	parallel lines	خطوط متوازية
параметр параболы	parameter of parabola	مقياس القطع المكافئ
переменная величина	variable	متغير
пересекать	to intersect	تتداخل
пересекающиеся прямые	crossing lines	خطوط متقاطعة
периметр	perimeter	محيط
перпендикуляр	perpendicular	متعامد
перпендикулярные прямые	perpendicular lines	خطوط متعامدة
плоскость	plane	سطح المستوي

площадь	area	منطقة
площадь круга	area of circle	مساحة الدائرة
поверхность	surface	مساحة
подставить значение	to substitute a value	استبدال قيمة
подстановка	substitution	الاستبدال
подстановка значений	substitution of values	استبدال القيم
показательное уравнение	exponential equation	المعادلة الأسية
полюс	pole	قطب
полюс координат	pole of coordinates	الإحداثيات القطب
полюс прямой	pole of curve	القطب مباشرة
полярные координаты	polar coordinates	تنسيق القطبية
порядок	order	إجراء
порядок кривой	order of curve	منحنى ترتيب
порядок определителя	order of determinant	المحدد
последовательность	sequence	متسلسلة
постоянная величина	constant value	القيمة الثابتة
потенцирование	potentiation	التقوية
предел	limit	النهاية
преобразование матрицы	transformation of matrix	تحويل مصفوفة
преобразование	transformation	تحويل
прибавлять	to add	إضافة
приведение	reduction	إيراد دليل
признак	criteria	علامة
прилежащий катет	adjacent leg	الجانِب المجاور
применение	application	تطبيق
принадлежать	to belong	تتتمي
проверять	to verify	تحقق من
проводить прямую	to draw a line	إجراء المباشر
проводить секущую	to draw a secant (line)	إجراء المقطع العرضي
проекция	projection	اسقاط
проекция катета на гипотенузу	projection of leg to hypotenuse	الإسقاط من الساق على وتر
произвольный	arbitrary	عشوائي / اعتباطي
пропорциональность	proportionality	التناسب

пропорция	proportion	نسبة
пространство	space	فضاء
противолежащий катет	opposite leg	الجانِب الآخر
прямая	straight line	مباشرة
прямая линия	straight line	خط مستقيم
прямоугольная матрица	rectangular matrix	مصفوفة مستطيلة
прямоугольная трапеция	rectangular trapezium	شبه منحرف مستطيل
прямоугольник	rectangle	المستطيل
прямоугольные (ортогональные) координаты	rectangular (orthogonal) coordinates	مستطيلة (متعادم) الإحداثيات
прямоугольный треугольник	rectangled triangle	مثلث قائم الزاوية
равенство	equality	مساواة
равнобедренный треугольник	isosceles triangle	مثلث متساوي الساقين
равнобокая трапеция	isosceles trapezium	شبه منحرف متساوي الساقين
равносильное уравнение	equivalent equation	أي ما يعادل المعادلة
равносторонний треугольник	equilateral triangle	مثلث متساوي الساقين
радиус	radius	قطر
разложение вектора	vector decomposition	التحلل من ناقلات
размер	size	قياس
разность	difference	فرق
разряд	charge	حمل
ранг	rank	صف
ранг квадратичной формы	rank of quadratic form	رتبة شكل من الدرجة الثانية
ранг матрицы	matrix range	نطاق المصفوفة
раскрывать	to open	يتبرع
рассматривать	to consider	نظر / ينظر
расстояние	distance	المسافة
расширенная матрица	augmented matrix	مصفوفة طويلة
результат	result	نتيجة

решать систему	to solve a system	حل نظام
решение (уравнения)	solution	حل المعادلة
ромб	rhomb(us)	معين هندسي
ряд	series	صف
свободный член	independent term	مصطلح حر
свойство	property	وحدة
свойство модуля	property of modulus (absolute value)	جدول الوحدة
сегмент	segment	قطعة
секущая	secant	القاطع خط يقطع قوسا
секущая кривой	secant of curve	منحنيات القسم
секущая линия	secant (line)	خط قاطع
секущая окружности	secant of circumference	القاطع الدائرة
секущая плоскость	secant plane	متعدد الوجوه من قطع السطح
секущая плоскость многогранника	secant plane of polyhedron	سطح القسم من متعدد الوجوه
секущая прямая	secant (line)	خط قاطع
семейство линий	set of lines	مجموعة خطوط
семейство линий на плоскости	set of lines on a plane	مجموعة خطوط على السطح
серединный перпендикуляр	midperpendicular	وسيط
сечение	cross section	قسم
симметричные точки	symmetrical points	نقاط متناظرة
симметрия	symmetry	تناظر
синус угла	sine of angle	جيب زاوية
система	system	نظام
система координат	system of coordinates	الاحداثيات
система однородных уравнений	system of homogeneous equations	نظام المعادلات المتجانسة
система симметричных уравнений	system of symmetric equations	نظام متماثل للمعادلات
система уравнений	system of equations	مجموعة من المعادلات

скалярное произведение векторов	scalar product of vectors	الجداء السلمي للمتجهات
скачок	gap	قفز
скобки	parentheses	قوسين
след матрицы	trace of matrix	أثر للمصفوفة
сложение	addition	إضافة
сложение матриц	addition of matrix	إضافة المصفوفات
случай	case	حالة
смешанное произведение векторов	mixed product of vectors	المنتجات المخلوطة للمتجهات
совместное применение	combined use	الاستخدام المشترك لل
соответственно равны	correspondingly equal	متساوية
соответствие	correspondence	الامتثال
соответствовать	to correspond	تطابق
соответствующие элементы	corresponding elements	عناصر المناظرة
составлять	to constitute	يشكل
способ	method	طريقة
способ подстановки	method of substitution	طريقة الاستبدال
степень	power	درجة
столбец	column	عمود
сторона (фигуры)	side of figure	جانب الشكل
строка	row	سلسلة
строка матрицы	row of matrix	صف من المصفوفه
существовать	to exist	يوجد
сходиться	to converge	تقارب
таблица	table	جدول
теорема	theorem	نظرية
тождественные преобразования	identical transformations	تحولات مماثلة
тождество	identity	هوية
точка	point	نقطة
точка касания	point of tangency	نقطة التماس
точка пересечения высот треугольника	point of intersection of heights of triangle	نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث

точка разрыва	point of gap	الفجوة نقطة
транспонирование	transposition	التحويل
трапеция	trapezium	معين منحرف
треугольник	triangle	مثلث
трехчлен	trinomial	ثلاثي الحدود
тупоугольный треугольник	obtuse triangle	مثلث منفرج الزاوية
угловой	angular	زاوي
упростить	to simplify	تبسيط
упрощенная система	simplified system	نظام مبسط
уравнение	equation	معادلة
уравнение касательной плоскости к поверхности	equation of slope to a plane of surface	معادلة المماس المستوى إلى السطح
условие	condition	الشرط
устранить	to eliminate	نزع
фигура	figure	الشكل
фокус кривой	focus of curve	منحنى التركيز
хорда	chord	حبل
хорда дуги	span	خيط إلى القوس
центр	center	مركز
центр круга	center of circle	مركز الدائرة
центр окружности	center of circumference	رباعي الزوايا
четырёхугольник	quadrangle	رباعي
числовая прямая	number line	رقم السطر
шаг	step	خطوة
эквивалентное уравнение	equivalent equation	المعادلة معادلة
эквивалентные преобразования	equivalent transformations	التحويلات ما يعادلها
эксцентриситет	eccentricity	عناصر المحددات
элементы определителя	element of determinant	تحديد العناصر
эллипс	ellipse	القطع الناقص

Русско-англо-вьетнамский словарь

Русский	Английский	Вьетнамский
абсцисса	abscissa	đường ngang
алгебра	algebra	đại số học
алгебра матриц	algebra of matrix	ma trận đại số
алгебраическое дополнение	algebraic complement	các đồng yếu tố
алгебраическое выражение	algebraic expression	biểu thức đại số
алгебраическое уравнение	algebraic equation	phương trình đại số
аргумент	argument	đối số
асимптота	asymptote	tiệm cận
асимптоты гиперболы	asymptotes of hyperbola	tiệm cận của hyperbol
базис	base	căn cứ
базисная строка	basic row	đường cơ sở
базисные переменные	basic variables	biến cơ bản
базисный минор	basic minor	nhỏ cơ bản
базисный минор матрицы	principal minor of matrix	ma trận nhỏ cơ bản
базисный столбец	basic column	cột cơ sở
базисный столбец матрицы	basic column of matrix	cột cơ sở của ma trận
бесконечно большая величина	indefinitely large value	vô cùng lớn số lượng
бесконечно малая величина	infinitesimal value	cực nhỏ số lượng
бесконечное множество	infinite set	tập vô hạn
биссектриса треугольника	bisector of triangle	phân giác của một tam giác
биссектриса угла	bisector	đường chia làm hai
боковые стороны трапеции	lateral sides of trapezoid	các cạnh của hình thang
в соответствие	in correspondence	tuân thủ
в частности	particularly	đặc biệt

ведущий элемент	leading element	yếu tố hàng đầu
вектор	vector	vector
вектор в пространстве	vector in space	không gian vector
вектор на плоскости	vector in plane	vector trong mặt phẳng
векторное произведение	vector product	sản phẩm vector
величина	value	số lượng
верное равенство	proper equality	bình đẳng thực sự
вертикальная асимптота	vertical asymptote	tiệm cận đứng
вертикальная прямая	vertical line	đường thẳng đứng
верхний индекс	upper index	sự biến địa chỉ
вершина	vertex	đỉnh đầu
вершина гиперболы	vertex of hyperbola	đỉnh của hyperbol
вершина конуса	vertex of cone	đỉnh của hình nón
вершина многогранника	vertex of polyhedron	đỉnh của đa diện
вершина параболы	vertex of parabola	các đỉnh của parabol
вершина пирамиды	vertex of pyramid	đỉnh của kim tự tháp
вершина треугольника	vertex of triangle	đỉnh của tam giác
вершина угла	vertex of angle	đỉnh của một góc
ветви гиперболы	branches of hyperbola	song khúc tuyến
возведение в степень	raising to a power	co hồi
вписанная окружность	inscribed circle	incircle
всегда	always	luôn luôn
выделить полный квадрат	to separate complete square	phân bổ đầy đủ vuông
выносить за скобки	to take out of parentheses	làm cho khung
выражение	expression	biểu
вырожденная матрица	singular matrix	ma trận số ít
высота	height	chiều cao
высота трапеции	height of trapezoid	chiều cao của hình thang
высота треугольника	height of triangle	chiều cao của một tam giác
вычитать	to subtract	khấu trừ
вычисление	calculation	tính toán
вычисление площади	calculation of area	khu vực tính

вычисление элементов треугольника	calculation of triangle elements	tính toán các yếu tố của tam giác
вычислять	to calculate	tính toán
геометрический	geometrical	hình học
геометрия	geometry	hình học
гипербола	hyperbola	khoa trương pháp
гипотенуза	hypotenuse	đường huyền
гипотенуза треугольника	hypotenuse of triangle	cạnh huyền của tam giác
главная диагональ	main (principal) diagonal	chính đường chéo
горизонтальная асимптота	horizontal asymptote	tiệm cận ngang
горизонтальная прямая	horizontal line	đường ngang
градусная мера дуги	degree measure of arc	đo lường mức độ của hồ quang
грань	edge	mặt
декартова система координат	Cartesian coordinates system	Hệ tọa độ Descartes
декартовы координаты	Cartesian coordinates	thuộc phái Descartes tọa độ
делать подстановку	to do substitution	thay các
диагональ	diagonal	chéo
диагональ матрицы	diagonal of matrix	ma trận đường chéo
диагональ многоугольника	diagonal of polygon	đường chéo của một đa giác
диагональ определителя	diagonal of determinant	yếu tố quyết định đường chéo
диагональ параллелепипеда	diagonal of parallelepiped	đường chéo của -hình
диагональ четырехугольника	diagonal of quadrilateral	đường chéo của tứ giác
диагональная матрица	diagonal matrix	ma trận đường chéo
диаметр	diameter	đường kính
диаметр круга	diameter of circle	vòng tròn có đường kính
диаметр окружности	diameter of circumference	đường kính vòng tròn
диаметр цилиндра	diameter of cylinder	Đường kính của xi lanh

диаметр шара	diameter of sphere	đường kính của quả bóng
директриса	directrix	nữ hiệu trưởng
директриса гиперболы	directrix of hyperbola	cường điệu hiệu trưởng
директриса параболы	directrix of parabola	đường chuẩn của parabol
директриса эллипса	directrix of ellipse	hiệu trưởng của elip
дискриминант	discriminator	biệt
длина	length	chiều dài
длина дуги	arc of length	vòng cung dài
длина катета	length of leg	chiều dài của chân
длина ломаной	length of a broken line	chiều dài của đường dây bị hỏng
длина окружности	length of circumference	đường tròn
длина отрезка	length of segment	chiều dài của phân khúc này
дополнение множества	addition of set	bổ sung của
дуга	arc	hình cung
дуга кривой	arc of curve	vòng cung của một đường cong
дуга окружности	arc of circumference	hình cung
единичная матрица	unit matrix	nhận dạng ma trận
зависимая величина	dependent value	biến phụ thuộc của
зависимость	dependence	phụ thuộc
задавать прямую уравнениями	to determine a line with equations	hỏi phương trình trực tiếp
заключать в скобки	to put in parentheses	dấu ngoặc
закрывать скобки	to close parentheses	ngoặc gần
замена переменных	substitution of variables	thay đổi của các biến
знак (математический)	sign (mathematical)	ký (Toán)
значение	value	nghĩa
значение неизвестного	value of unknown	giá trị của không biết
индекс	index	mục lục
интервал	interval	khoảng thời gian
иррациональное уравнение	irrational equation	phương trình vô tỉ

исключение	elimination	ngoại lệ
исключение неизвестных (переменных)	elimination of unknowns (variables)	loại bỏ các ẩn số (biến số)
исследование	investigation	điều tra
исследование функции	investigation of function	nghiên cứu các chức năng
каноническое уравнение	canonical equation	phương trình chính tắc
касательная	tangent	tiếp tuyến
касательная в точке перегиба кривой	tangent at an inflection point	tiếp tuyến tại điểm uốn của đường cong
касательная к графику функции	tangent to a graph of function	tiếp xúc với đồ thị của hàm
касательная к окружности	tangent to a circumference	tiếp xúc với chu vi
касательная прямая	tangent line	đường tiếp tuyến
катет	leg (of a triangle), cathetus	cathetus
квадрат	square	vuông
квадратичная форма	quadratic form	hình thức bậc hai
квадратная матрица	square matrix	ma trận vuông
квадратное уравнение	quadratic equation	phương trình bậc hai
квадратные скобки	brackets	dấu ngoặc vuông
коллинеарный вектор	collinear vector	vector collinear
копланарный вектор	coplanar vector	vector phẳng
конец	end	đầu
константа	constant	không thay đổi
координата	coordinate	phối hợp
координатная ось	axis of coordinate	phối hợp trục
координатная плоскость	coordinate plane	phối hợp máy bay
координаты вектора	vector coordinates	tọa độ của các vector
координаты точки	coordinates of point	tọa độ điểm
косинус угла	cosine of angle	cosin của góc
коэффициент	coefficient	hệ số
коэффициент пропорциональности	coefficient of proportionality	hệ số tỉ lệ
кривая	curve	đường cong

кривая второго порядка	curve of the second order	đường cong của lệnh thứ hai
круг	circle	vòng tròn
круглые скобки	parentheses	ngoặc
круговой сегмент	circular segment	phân khúc tròn
круговой сектор	circular sector	ngành tròn
линейное уравнение	linear equation	phương trình tuyến tính
логарифмическое уравнение	logarithmic equation	phương trình logistic
ломаная (линия)	broken (line)	dòng bị hỏng (Line)
луч	ray	tia
масштаб	scale	tỉ lệ
матрица	matrix	ma trận
матрица квадратичной формы	matrix of square form	ma trận của các hình thức bậc hai
матрица-столбец	column matrix	ma trận cột
матрица-строка	row matrix	ma trận hàng
медиана	median	trung tuyến
метод (способ) подстановки	method of substitution	phương pháp (phương pháp) thay người
метод Гаусса	method of Gauss	cột
метод, способ	method	phương pháp, phương pháp
минор	minor	nhỏ
многоугольник	polygon	đa giác
наклонная	inclined line	nghiêng
направление	direction	phương hướng
начало отсчета	origin	gốc
неверное равенство	improper equality	bình đẳng sai
независимая величина	independent value	giá trị độc lập
независимая система	independent system	hệ thống độc lập
неизвестная	unknown	không biết
несовместная система	inconsistent system	hệ thống không phù hợp
нижний индекс	subscript	subscript
нормаль	normal, perpendicular	bình thường
образовывать	to generate	hình thức

обратная матрица	inverse matrix	ma trận nghịch đảo
обратный	opposite	trở lại
обратный ход	inversion	sự đảo ngược
объединение множеств	unit of sets	công đoàn của các bộ
объект	object	vật
однородная система	homogeneous system	hệ thống đồng nhất
окружность	circumference	vòng tròn
описанная окружность	circumscribed circle	circumcircle
определение	definition	định nghĩa
определитель	determinant	xác định
ортогональный	orthogonal	trực giao
основание	base	căn cứ
основание наклонной	base of inclined line	cơ sở dốc
основание перпендикуляра	base of perpendicular	chân vuông góc
основание трапеции	base of trapezoid	cơ sở của hình thang
основание треугольника	base of triangle	cơ sở của tam giác
остаточный	residual	còn lại
остроугольный треугольник	acute triangle	tam giác cấp tính
ось	axis	trục
ось абсцисс	abscissa axis	X-trục
откладывать по оси абсцисс	to point on abscissa axis	hoãn trục hoành
открывать скобки	to open parentheses	mở ngoặc
относительный	relative	quan hệ
отрезок	segment	phân khúc
парабола	parabola	đường hình parabol
параллелограмм	parallelogram	hình bình hành
параметр параболы	parameter of parabola	tham số của parabol
переменная величина	variable	biến số
пересекать	to intersect	vượt qua
пересекающиеся прямые	crossing lines	đường giao nhau
периметр	perimeter	chu vi
перпендикуляр	perpendicular	thẳng góc

перпендикулярные прямые	perpendicular lines	đường thẳng vuông góc
плоскость	plane	máy bay
площадь	area	khu vực
площадь круга	area of circle	diện tích hình tròn
поверхность	surface	mặt
подставить значение	to substitute a value	thay thế giá trị
подстановка	substitution	thay thế
подстановка значений	substitution of values	thay thế các giá trị
показательное уравнение	exponential equation	phương trình mũ
полюс	pole	cực
полюс координат	pole of coordinates	tọa độ cực
полюс прямой	pole of curve	cực thẳng
полярные координаты	polar coordinates	cực phối hợp
порядок	order	Sắp xếp
порядок кривой	order of curve	đường cong thứ tự
порядок определителя	order of determinant	đề yếu tố quyết định
последовательность	sequence	trình tự
постоянная величина	constant value	không thay đổi
потенцирование	potentiation	tiềm lực
предел	limit	giới hạn
преобразование матрицы	transformation of matrix	chuyển đổi
преобразование	transformation	ma trận
прибавить	to add	chuyển đổi
приведение	reduction	thêm vào
признак	criteria	sự diễn dần
прилежащий катет	adjacent leg	dấu
применение	application	mặt tiếp giáp
принадлежать	to belong	ứng dụng
проверить	to verify	thuộc về
проводить прямую	to draw a line	xác nhận
проводить секущую	to draw a secant (line)	tiến hành trực tiếp
проекция	projection	tiến hành cắt ngang
проекция катета на гипотенузу	projection of leg to hypotenuse	chiều

произвольный	arbitrary	sản phẩm
пропорциональность	proportionality	tình trạng cân xứng
пропорция	proportion	tỷ lệ
пространство	space	không gian
противолежащий катет	opposite leg	phía đối lập
прямая	straight line	thẳng
прямая линия	straight line	đường thẳng
прямоугольная матрица	rectangular matrix	ma trận hình chữ nhật
прямоугольная трапеция	rectangular trapezium	hình thang hình chữ nhật
прямоугольник	rectangle	hình chữ nhật
прямоугольные (ортогональные) координаты	rectangular (orthogonal) coordinates	hình chữ nhật (trục giao) tọa độ
прямоугольный треугольник	rectangled triangle	tam giác vuông
равенство	equality	bình đẳng
равнобедренный треугольник	isosceles triangle	tam giác cân
равнобокая трапеция	isosceles trapezium	hình thang cân
равносильное уравнение	equivalent equation	tương đương với phương trình
равносторонний треугольник	equilateral triangle	tam giác đều
радиус	radius	bán kính
разложение вектора	vector decomposition	phân hủy của các vector
размер	size	kích thước
разность	difference	khác nhau
разряд	charge	phóng điện
ранг	rank	cấp
ранг квадратичной формы	rank of quadratic form	cấp bậc của các hình thức bậc hai
ранг матрицы	matrix range	cấp
раскрыть	to open	tiết lộ
рассматривать	to consider	xem xét
расстояние	distance	khoảng cách
расширенная матрица	augmented matrix	ma trận tăng cường

результат	result	kết quả
решать систему	to solve a system	để giải quyết một hệ thống
решение (уравнения)	solution	giải pháp (phương trình)
ромб	rhomb(us)	hình thoi
ряд	series	hàng
свободный член	independent term	miễn phí hạn
свойство	property	bất động sản
свойство модуля	property of modulus (absolute value)	mô-đun tài sản
сегмент	segment	phân khúc
секущая	secant	đường cát tuyến
секущая кривой	secant of curve	đường cong phân
секущая линия	secant (line)	đường cát tuyến
секущая окружности	secant of circumference	đường cát tuyến của đường tròn
секущая плоскость	secant plane	cutplane
секущая плоскость многогранника	secant plane of polyhedron	phần mặt phẳng của đa diện
секущая прямая	secant (line)	đường cát tuyến
семейство линий	set of lines	dòng họ
семейство линий на плоскости	set of lines on a plane	gia đình của dòng trên máy bay
серединный перпендикуляр	midperpendicular	midperpendicular
сечение	cross section	tiết diện
симметричные точки	symmetrical points	điểm đối xứng
симметрия	symmetry	tính cân xứng
синус угла	sine of angle	sin của góc
система	system	hệ thống
система координат	system of coordinates	phối hợp
система однородных уравнений	system of homogeneous equations	hệ phương trình đồng nhất
система симметричных уравнений	system of symmetric equations	hệ thống đối xứng của phương trình

система уравнений	system of equations	thiết lập các phương trình
скалярное произведение векторов	scalar product of vectors	tích vô hướng của vector
скачок	gap	nhảy
скобки	parentheses	khung
след матрицы	trace of matrix	dấu vết của ma trận
сложение	addition	thêm vào
сложение матриц	addition of matrix	Ngoài ra các ma trận
случай	case	trường hợp
смешанное произведение векторов	mixed product of vectors	sản phẩm hỗn hợp của vector
совместное применение	combined use	chung ứng dụng
соответственно равны	correspondingly equal	tương ứng
соответствие	correspondence	phù hợp
соответствовать	to correspond	trận đấu
соответствующие элементы	corresponding elements	thích hợp thành phần
составлять	to constitute	cấu tạo
способ	method	l đường
способ подстановки	method of substitution	phương pháp thay thế
степень	power	trình độ
столбец	column	trụ
сторона (фигуры)	side of figure	bên (hình)
строка	row	chuỗi
строка матрицы	row of matrix	ma trận hàng
существовать	to exist	tồn tại
сходиться	to converge	làm hội tụ
таблица	table	bàn
теорема	theorem	định lý
тождественные преобразования	identical transformations	biến đổi giống hệt nhau
тождество	identity	bản sắc
точка	point	điểm
точка касания	point of tangency	điểm của tiếp tuyến

точка пересечения высот треугольника	point of intersection of heights of triangle	giao điểm của chiều cao của tam giác
точка разрыва	point of gap	khoảng cách điểm
транспонирование	transposition	sự chuyển điệu
трапеция	trapezium	hình thang
треугольник	triangle	tam giác
трехчлен	trinomial	tam thức
тупоугольный треугольник	obtuse triangle	tam giác tù
угловой	angular	có góc cạnh
упростить	to simplify	đơn giản hóa
упрощенная система	simplified system	hệ thống đơn giản
уравнение	equation	phương trình
уравнение касательной плоскости к поверхности	equation of slope to a plane of surface	phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với bề mặt
условие	condition	điều kiện
устранить	to eliminate	bỏ
фигура	figure	nhân vật
фокус кривой	focus of curve	đường cong tập trung
хорда	chord	dây nhau
хорда дуги	span	âm arc
центр	center	trung tâm
центр круга	center of circle	trung tâm của vòng tròn
центр окружности	center of circumference	vòng tròn trung tâm
четырёхугольник	quadrangle	sân trường học
числовая прямая	number line	dòng số
шаг	step	bước đi
эквивалентное уравнение	equivalent equation	phương trình tương đương
эквивалентные преобразования	equivalent transformations	biến đổi tương đương
эксцентриситет	eccentricity	người kỳ dị
элементы определителя	element of determinant	các yếu tố của các yếu tố quyết định
эллипс	ellipse	hình bầu dục

РУССКО-АНГЛО-КИТАЙСКИЙ СЛОВАРЬ

Русский	Английский	Китайский
абсцисса	abscissa	横坐标
алгебра	algebra	代数
алгебра матриц	algebra of matrix	矩阵代数
алгебраическое дополнение	algebraic complement	余因子
алгебраическое выражение	algebraic expression	代数表达式
алгебраическое уравнение	algebraic equation	代数方程
аргумент	argument	论据
асимптота	asymptote	渐进线
асимптота графика функций	asymptote of graph of function	函数图形的渐近线
базис	base	底
базисная строка	basic row	底线
базисные переменные	basic variables	基变量
базисный минор	basic minor	主余子式
базисный минор матрицы	principal minor of matrix	矩阵的基余子式
базисный столбец	basic column	主列
базисный столбец матрицы	basic column matrix	矩阵的基列
бесконечно большая величина	indefinitely large value	无穷大的值
бесконечно малая величина	infinitesimal value	无限
бесконечное множество	infinite set	无限集合
биссектриса треугольника	bisector of triangle	三角形的平分线
биссектриса угла	bisector	角的平分线
боковые стороны трапеции	lateral sides of trapezoid	梯形的侧面
в соответствие	in correspondence	相符合的

в частности	particularly	特殊的
ведущий элемент	leading element	上一元素
вектор	vector	向量
вектор в пространстве	vector in space	向量空间
вектор на плоскости	vector in plane	向量在平面
векторное произведение	vector product	向量积
величина	value	大小, 价值
верное равенство	proper equality	正确的等式
вертикальная асимптота	vertical asymptote	垂直渐近线
вертикальная прямая	vertical line	垂直线
верхний индекс	upper index	上标
вершина	vertex	顶点
вершина гиперболы	vertex of hyperbola	双曲线的顶点
вершина конуса	vertex of cone	圆锥的顶点
вершина многогранника	vertex of polyhedron	多面体的顶点
вершина параболы	vertex of parabola	抛物线的顶点
вершина пирамиды	vertex of pyramid	金字塔的顶点
вершина треугольника	vertex of triangle	三角形的顶点
вершина угла	vertex of angle	角的顶点
ветви гиперболы	branches of hyperbola	双曲线的分支
возводить в степень	raise to a power	提高到一个功率
вписанная окружность	inscribed circle	内切圆
всегда	always	总是
выделить полный квадрат	separate complete square	独立的完整的正方形
выносить общий множитель за скобки	to take out common factors of parentheses	去掉括号常见因素
выражение	expression	表达式
вырожденная матрица	singular matrix	退化矩阵
высота	height	高度
высота трапеции	height of trapezoid	梯形的高度

высота треугольника	height of triangle	三角形的高度
вычитать	to subtract	减去
вычисление	calculation	计算
вычисление площади	calculation of area	计算面积
вычисление элементов треугольника	calculation of triangle elements	计算三角形元素
вычислять	to calculate	计算
геометрический	geometrical	几何
геометрия	geometry	几何
гипербола	hyperbola	双曲线
гипотенуза	hypotenuse	斜边
гипотенуза треугольника	hypotenuse of triangle	三角形的斜边
главная диагональ	main (principal) diagonal	主对角线
горизонтальная асимптота	horizontal asymptote	水平渐近线
горизонтальная прямая	horizontal line	水平线
градус	degree	度数
грань	edge	棱面
декартова система координат	Cartesian coordinates system	笛卡尔坐标系
декартовы координаты	Cartesian coordinates	直角坐标系 笛卡尔坐标
делать подстановку	to do substitution	使替代 做代替
диагональ	diagonal	对角线
диагональ матрицы	diagonal of matrix	对角矩阵
диагональ многоугольника	diagonal of polygon	对角的多边形的
диагональ определителя	diagonal of determinant	对角行列式
диагональ параллелепипеда	diagonal of parallelepiped	对角线的平行六 面体
диагональ четырёхугольника	diagonal of quadrilateral	对角线的四边形

диагональная матрица	diagonal matrix	对角矩阵
диаметр	diameter	直径
диаметр круга	diameter of circle	圆的直径
диаметр окружности	diameter of circumference	直径的圆
диаметр цилиндра	diameter of cylinder	圆柱体的围经
диаметр шара	diameter of sphere	球的直径
директриса	directrix	准线
директриса гиперболы	directrix of hyperbola	双曲线的准线
директриса параболы	directrix of parabola	抛物线的准线
директриса эллипса	directrix of ellipse	椭圆的准线
дискриминант	discriminator	判别式
длина	length	长度
длина дуги	arc of length	弧长
длина катета	ength of leg	直角边的长度
длина ломаной	length of a broken line	折线的长度
длина окружности	length of circumference	圆周长
длина отрезка	length of segment	线段的长度
дополнение множества	addition of set	集合
дуга	arc	弧
дуга кривой	arc of curve	弧曲线的
дуга окружности	arc of circumference	弧形
единичная матрица	unit matrix	单位矩阵
зависимая величина	dependent value	相关的值
зависимость	dependence	相关
задавать прямую уравнениями	to determine a line with equations	直接提出方程式
заключать в скобки	to put in parentheses	放在括号内
закрывать скобки	to close parentheses	<u>关闭括号</u>
замена переменных	substitution of variables	变量的变化
знак	sign	符号

значение	value	值
значение неизвестного	value of unknown	未知的值
индекс	index	索引
интервал	interval	区间
иррациональное уравнение	irrational equation	无理方程
исключение	elimination	消元法
исключение неизвестных (переменных)	elimination of unknowns (variables)	消除未知(变量)
исследование	investigation	研究
исследование функции	investigation of function	功能调查
каноническое уравнение	canonical equation	正则方程
касательная	tangent	切线
касательная в точке перегиба кривой	tangent at a inflection point	切线在拐点
касательная к графику функции	tangent to a graph of function	切线函数表
касательная к окружности	tangent to a circumference	圆的切线
касательная прямая	tangent line	切线
катет	leg (of a triangle), cathetus	直角边
квадрат	square	平方
квадратичная форма	quadratic form	二次型
квадратная матрица	square matrix	二次型矩阵
квадратное уравнение	quadratic equation	二次方程
квадратные скобки	brackets	方括号
коллинеарный вектор	collinear vector	共线向量
компланарный вектор	coplanar vector	共面向量
конец	end	结束
константа	constant	常数
координата	coordinate	坐标
координатная ось	axis of coordinate	坐标轴

координатная плоскость	coordinate plane	坐标平面
координаты вектора	vector coordinates	向量坐标
координаты точки	coordinates of point	点坐标
косинус угла	cosine of angle	角的余弦
коэффициент	coefficient	系数
коэффициент пропорциональности	coefficient of proportionality	比例系数
кривая	curve	曲线
кривая второго порядка	curve of the second order	二阶曲线
круг	circle	圆
круглые скобки	parentheses	圆括号
круговой сегмент	circular segment	圆弧段
круговой сектор	circular sector	扇形
линейное уравнение	linear equation	线性方程
логарифмическое уравнение	logarithmic equation	对数方程
ломаная (линия)	broken (line)	虚线
луч	ray	射线
масштаб	scale	比例尺
матрица	matrix	矩阵
матрица квадратичной формы	matrix of square form	二次型的矩阵
матрица-столбец	column matrix	列矩阵
матрица-строка	row matrix	行矩阵
медиана	median	中位数
метод (способ) подстановки	method of substitution	代替的方法
метод Гаусса	method of Gauss	高斯方法
метод, способ	method	方法
минор	minor	余子式
многоугольник	polygon	多边形
наклонная	inclined line	斜线

направление	direction	方向
начало отсчета	origin	记数开始
неверное равенство	improper equality	不当的平等
независимая величина	independent value	独立的价值
независимая система	independent system	独立的系统
неизвестная	unknown	未知
несовместная система	inconsistent system	不一致的系统
нижний индекс	subscript	下标
нормаль	normal, perpendicular	正常的, 垂直的
образовывать	to generate	形成
обратная матрица	inverse matrix	逆矩阵
обратный	opposite	相反
обратный ход	inversion	逆运算
объединение множеств	unit of sets	联集
объект	object	对象
однородная система	homogeneous system	同样的体系
окружность	circumference	周长
описанная окружность	circumscribed circle	外接圆
определение	definition	定义
определитель	determinant	行列式
ортогональный	orthogonal	正交的
основание	base	底数
основание наклонной	base of inclined line	倾斜底
основание перпендикуляра	base of perpendicular	垂直线底边
основание трапеции	base of trapezoid	梯形的底边
основание треугольника	base of triangle	三角形的底座
остаточный	residual	剩余
остроугольный треугольник	acute triangle	锐角三角形
ось	axis	轴

ось абсцисс	abscissa axis	横坐标轴
откладывать по оси абсцисс	to point on abscissa axis	横坐标轴上的
открывать скобки	to open parentheses	开括号
относительный	relative	相对的
отрезок	segment	段
парабола	parabola	抛物线
параллелограмм	parallelogram	平行四边形
параметр параболы	parameter of parabola	抛物线的参数
переменная величина	variable	变量值
пересекать	to intersect	相交
пересекающиеся прямые	crossing lines	交叉线
периметр	perimeter	周长
перпендикуляр	perpendicular	垂直
перпендикулярные прямые	perpendicular lines	垂直线
плоскость	plane	平面
площадь	area	面积
площадь круга	area of circle	圆的面积
поверхность	surface	表面
подставить значение	to substitute a value	替代值
подстановка	substitution	替代
подстановка значений	substitution of values	值替换
показательное уравнение	exponential equation	指数方程
полюс	pole	极
полюс координат	pole of coordinates	极坐标
полюс прямой	pole of line	极直线
полярные координаты	polar coordinates	极坐标
порядок	order	顺序
порядок кривой	order of curve	曲线的阶
порядок определителя	order of determinant	行列式的阶

последовательность	sequence	顺序
постоянная величина	constant value	常数
потенцирование	potentiation	求幂
предел	limit	极限
преобразование матрицы	transformation of matrix	矩阵的变换
преобразование	transformation	变换
прибавлять	to add	添加
приведение	reduction	化简
признак	criteria	特征
прилежащий катет	adjacent leg	邻边
применение	application	应用
принадлежать	to belong	属于
проверять	to verify	检查
проводить прямую	to draw a line	直线
проводить секущую	to draw a secant (line)	割线
проекция	projection	投影
проекция катета на гипотенузу	projection of leg to hypotenuse	垂直射影在斜弦边
произвольный	arbitrary	任意
пропорциональность	proportionality	比例
пропорция	proportion	比例
пространство	space	空间
противолежащий катет	opposite leg	相反的腿
прямая	straight line	直线
прямая линия	straight line	直线
прямоугольная матрица	rectangular matrix	三角矩阵
прямоугольная трапеция	rectangular trapezium	直角梯形
прямоугольник	rectangle	矩形
прямоугольные (ортогональные) координаты	rectangular (orthogonal) coordinates	矩形（正交）坐标

прямоугольный треугольник	rectangled triangle	直角三角形
равенство	equality	等式
равнобедренный треугольник	isosceles triangle	等腰三角形
равнобокая трапеция	isosceles trapezium	等腰梯形
равносильное уравнение	equivalent equation	简化的方程
равносторонний треугольник	equilateral triangle	等边三角形
радиус	radius	半径
разложение вектора	vector decomposition	分解的向量
размер	size	大小
разность	difference	差
разряд	charge	等级
ранг	rank	秩
ранг квадратичной формы	rank of quadratic form	二次型的秩
ранг матрицы	matrix range	矩阵的秩
раскрывать	to open	张开
рассматривать	to consider	看作是
расстояние	distance	距离
расширенная матрица	augmented matrix	扩展矩阵
результат	result	结果
решать систему	to solve a system	解决方法
решение (уравнения)	solution	解 (方程)
ромб	rhomb(us)	菱形
ряд	series	排
свободный член	independent term	自由项
свойство	property	特性
свойство модуля	property of absolute value	绝对值财产
сегмент	segment	段
секущая	secant	割线
секущая кривой	secant of curve	正割曲线

секущая линия	secant (line)	割线
секущая окружности	secant of circumference	圆的割线
секущая плоскость	secant plane	切平面
секущая плоскость многогранника	secant plane of polyhedron	多面体的截割面
секущая прямая	secant (line)	割线
семейство линий	set of lines	线族
семейство линий на плоскости	set of lines on a plane	线族在平面上
серединный перпендикуляр	middle perpendicular	中间垂直
сечение	cross section	截面
симметричные точки	symmetrical points	对称点
симметрия	symmetry	对称
синус угла	sine of angle	角的正弦
система	system	系统
система координат	system of coordinates	坐标系统
система однородных уравнений	system of homogeneous equations	齐次方程组
система симметричных уравнений	system of symmetric equations	对称方程组
система уравнений	system of equations	方程系统
скалярное произведение векторов	scalar product of vectors	内积
скачок	gap	跳跃
скобки	parentheses	括号
след матрицы	trace of matrix	矩阵轨迹
сложение	addition	增加
сложение матриц	addition of matrix	矩阵加法
случай	case	情况
смешанное произведение векторов	mixed product of vectors	向量混合积

совместное применение	combined use	组合使用
соответственно равны	correspondingly equal	对应相等
соответствие	correspondence	对应
соответствовать	to correspond	符合的
соответствующие элементы	corresponding elements	对应的元素
составлять	to constitute	组成
способ	method	方法
способ подстановки	method of substitution	代入法
степень	power	数度
столбец	column	列
сторона (фигуры)	side (of figure)	人物侧
строка	line	行
строка матрицы	row of matrix	距阵的行
существовать	to exist	存在
сходиться	to converge	合流
таблица	table	表
теорема	theorem	定理
тождественные преобразования	identical transformations	恒等变换
тождество	identity	恒等式
точка	point	点
точка касания	point of tangency	切点
точка пересечения	point of intersection	交点
точка разрыва	point of gap	点的突破
транспонирование	transposition	转换
трапеция	trapezium	梯形
треугольник	triangle	三角形
трехчлен	trinomial	三项式
тупоугольный треугольник	obtuse triangle	钝角三角形

угловой	angular	角
упростить	to simplify	简化
упрощенная система	simplified system	简化系统
уравнение	equation	方程
уравнение касательной плоскости к поверхности	equation of slope to a plane of surface	切平面的方程为 表面
условие	condition	条件
устранить	to eliminate	排除
фигура	figure	外形
фокус кривой	focus of curve	曲线的焦距
хорда	chord	弦
хорда дуги	span	弦弧
центр	center	中心
центр круга	center of circle	圆心
центр окружности	center of circumference	周长中心
четырёхугольник	quadrangle	四角形
числовая прямая	number line	数线
шаг	step	步骤
эквивалентное уравнение	equivalent equation	等价方程
эквивалентные преобразования	equivalent transformations	等价变换
эксцентриситет	eccentricity	离心率
элементы определителя	element of determinant	行列式的元素
эллипс	ellipse	椭圆

РУССКО-АНГЛО-ТУРКМЕНСКИЙ СЛОВАРЬ

Русский	Английский	Туркменский
абсцисса	abscissa	abssissa
алгебра	algebra	algebra
алгебра матриц	algebra of matrix	matrisalaryň algebrasy
алгебраическое дополнение	algebraic complement	algebraik doldurgyç
алгебраическое выражение	algebraic expression	algebraik aňlatma
алгебраическое уравнение	algebraic equation	algebraik deňleme
аргумент	argument	argument
асимптота	asymptote	asimptota
асимптота графика функций	asymptote of graph of function	funksiýanyň grafiginiň asimptotasy
базис	base	bazis
базисная строка	basic row	bazis setir
базисные переменные	basic variables	bazis üýtgeýänler
базисный минор	minor of basic	Bazis minor
базисный минор матрицы	principal minor of matrix	Matrisanyň bazis minory
базисный столбец	column of basic	Bazis sütün
базисный столбец матрицы	basic column of matrix	Matrisanyň bazis sütüni
бесконечно большая величина	indefinitely large value	Tükeniksiz uly ululyk
бесконечно малая величина	infinitesimal value	Tükeniksiz kiçi ululyk
бесконечное множество	infinite set	Tükeniksiz köplük
биссектриса треугольника	bisector of triangle	Uçburçlygyň bissektirisasy
биссектриса угла	bisector	Burçuň bissektirisasy
боковые стороны трапеции	lateral sides of trapezoid	Trapeziýanyň gapdal taraplary
в соответствие	in correspondence	laýyklykda

в частности	particularly	aýratynlykda
ведущий элемент	leading element	Baş element
вектор	vector	Wektor
вектор в пространстве	vector in space	Giňişlikde wektor
вектор на плоскости	vector in plane	Tekizlikde wektor
векторное произведение	vector product	Wektor köpeltmek hasyly
величина	value	Ululyk
верное равенство	proper equality	Dogry deňlik
вертикальная асимптота	vertical asymptote	Wertikal asimptota
вертикальная прямая	vertical line	Wertikal göni çyzyk
верхний индекс	upper index	Ýokarky indeks
вершина	vertex	Depe
вершина гиперболы	vertex of hyperbola	Giperbolanyň depesi
вершина конуса	vertex of cone	Konusyň depesi
вершина многогранника	vertex of polyhedron	Köpgranlygyň depesi
вершина параболы	vertex of parabola	Parbolanyň depesi
вершина пирамиды	vertex of pyramid	Piramidanyň depesi
вершина треугольника	vertex of triangle	Üçburçlygyň depesi
вершина угла	vertex of angle	Burçuň depesi
ветви гиперболы	branches of hyperbola	Giperbolanyň şahalary
возводить в степень	raise to a power	Derejä götermek
вписанная окружность	inscribed circle	Içinden çyzylan töwerek
всегда	always	Hemiçe
выделить полный квадрат	to separate complete square	Doly kwadraty görkezmek
выносить общий множитель за скобки	to take out common factors of parentheses	Umumy köpeldijini ýaýyň daýyna çykarmak
выражение	expression	Aňlatma
вырожденная матрица	singular matrix	Aýratyn matrisa
высота	height	Beýiklik
высота трапеции	height of trapezoid	Trapesiýanyň beýikligi

высота треугольника	height of triangle	Üçburçlygyň beýikligi
вычесть	to subtract	Aýyrmak
вычисление	calculation	Hasap
вычисление площади	calculation of area	Meýdany hasaplamak
вычисление элементов треугольника	calculation of triangle elements	êç burçlygyň elementlerini hasaplamak
вычислять	to calculate	Hasaplamak
геометрический	geometrical	Geometrik
геометрия	geometry	Geometriýa
гипербола	hyperbola	Giperbola
гипотенуза	hypotenuse	Gipotenuza
гипотенуза треугольника	hypotenuse of triangle	êç burçlygyň gipotenuzasy
главная диагональ	main (principal) diagonal	Esasy diagonal
горизонтальная асимптота	horizontal asymptote	Gorizonttal asimptota
горизонтальная прямая	horizontal line	Gorizonttal göni çyzyk
градус	degree	Gradus
грань	edge	Gran
декартова система координат	Cartesian coordinates system	Dekart koordinatalar ulgamy
декартовы координаты	Cartesian coordinates	Dekart koordinatalary
делать подстановку	to substitute	Çalşyрма geçirmek
диагональ	diagonal	Diagonal
диагональ матрицы	diagonal of matrix	Matrisanyň diagonalý
диагональ многоугольника	diagonal of polygon	Köpburçlugyň diagonalý
диагональ определителя	diagonal of determinant	Kesgitleýjiniň diagonalý
диагональ параллелепипеда	diagonal of parallelepiped	Parallelepipedin diagonalý
диагональ четырехугольника	diagonal of quadrilateral	Dörtburçlugyň diagonalý
диагональная матрица	diagonal matrix	Diagonal matrisa
диаметр	diameter	Diametr

диаметр круга	diameter of circle	Tegelegiň diametri
диаметр окружности	diameter of circumference	Töweregiň diametri
диаметр цилиндра	diameter of cylinder	Silindriň diametri
диаметр шара	diameter of sphere	Şaryň diametri
директриса	directrix	Direktrisa
директриса гиперболы	directrix of hyperbola	Giperbolanyň direktrisasý
директриса параболы	directrix of parabola	Parabolanyň direktrisasý
директриса эллипса	directrix of ellipse	Ellipsiň direktrisasý
дискриминант	discriminator	Diskriminant
длина	length	Uzynlyk
длина дуги	arc of length	Duganyň uzynlygy
длина катета	length of leg	Katetiň uzynlygy
длина ломаной	length of a broken line	Döwük çyzygyň uzynlygy
длина окружности	length of circumference	Töweregiň uzynlygy
длина отрезка	length of segment	Kesimiň uzynlygy
дополнение множества	addition of set	Köplügiň doldurgyjy
дуга	arc	Duga
дуга кривой	arc of curve	Egri çyzygyň dugasy
дуга окружности	arc of circumference	Töweregiň dugasy
единичная матрица	unit matrix	Birlik matrisa
зависимая величина	dependent value	Bagly ululyk
зависимость	dependence	Baglylyk
задавать прямую уравнениями	to determine a line with equations	Deňlemeler arkaly göni çyzygy bermek
заключать в скобки	to put in parentheses	Ýaýyň içine almak
закрывать скобки	to close parentheses	è aýlary ýapmak
замена переменных	substitution of variables	Üýtgeýänleri çalyşmak
знак	sign	Belgi
значение	value	Baha
значение неизвестного	value of unknown	Näbelliniň bahasy

индекс	index	Indeks
интервал	interval	Interwal
иррациональное уравнение	irrational equation	Irrasional deňleme
исключение	elimination	Ýok etmek
исключение неизвестных (переменных)	elimination of unknowns (variables)	Näbelli (üýtgeýänleri)ýok etmek
исследование	investigation	Derňeme
исследование функции	investigation of function	Funksiýany derňemek
каноническое уравнение	canonical equation	Kanonik deňleme
касательная	tangent	Galtaşýan çyzyk
касательная в точке перегиба кривой	tangent at a inflection point	Egri çyzygyň egrilik nokadyndaky galtaëýan çyzyk
касательная к графику функции	tangent to a graph of function	Funksiýanyň grafigine bolan galtaëýan çyzyk
касательная к окружности	tangent to a circumference	Töwerege bolan galtaëýan çyzyk
касательная прямая	tangent line	Galtaëýan göni çyzyk
катет	leg (of a triangle), cathetus	Katet
квадрат	square	Kwadrat
квадратичная форма	quadratic form	Kwadratlik forma
квадратная матрица	square matrix	Kwadrat matrisa
квадратное уравнение	quadratic equation	Kwadrat deňleme
квадратные скобки	brackets	Kwadrat ýaýlar
коллинеарный вектор	collinear vector	Kollinear wektor
компланарный вектор	coplanar vector	Komplanar wektor
конец	end	Soňy
константа	constant	Konstanta
координата	coordinate	Koordinata
координатная ось	axe of coordinate	Koordinata oky
координатная плоскость	coordinate plane	Koordinata tekizligi
координаты вектора	vector coordinates	Wektoryň koordinatalary

координаты точки	coordinates of point	Nokadyň koordinatalary
косинус угла	cosine of angle	Burçuň kosinusy
коэффициент	coefficient	Koeffisiýent
коэффициент пропорциональности	coefficient of proportionality	Proporsionallyk koeffisiýenti
кривая	curve	Egri çyzyk
кривая второго порядка	curve of the second order	Ikinji tertipli egri çyzyk
круг	circle	Tegelek
круглые скобки	parentheses	Tegelek ýaýlar
круговой сегмент	circular segment	Tegelek segment
круговой сектор	circular sector	Tegelek sektor
линейное уравнение	linear equation	Çyzykly deňleme
логарифмическое уравнение	logarithmic equation	Logarifmik deňleme
ломаная (линия)	broken (line)	Döwük (çyzyk)
луч	ray	Şöhle
масштаб	scale	Masştab
матрица	matrix	Matrisa
матрица квадратичной формы	matrix of square form	Kwadratık formaly matrisa
матрица-столбец	column matrix	Sütün matrisa
матрица-строка	row matrix	Setir matrisa
медиана	median	Mediana
метод (способ) подстановки	method of substitution	Çalşyрма usuly
метод Гаусса	method of Gauss	Gaussyň usuly
метод, способ	method	Usul, ýol
минор	minor	Minor
многоугольник	polygon	Köpburçlyk
наклонная	inclined line	Ýapgyt
направление	direction	Ugur
начало отсчета	origin	Hasap başlangyjy
неверное равенство	improper equality	Ýalňyş deňlik
независимая величина	independent value	Bagly däl ululyk

независимая система	independent system	Bagly däl ulgam
неизвестная	unknown	Näbelli
несовместная система	inconsistent system	Aýratyn ulgam
нижний индекс	subscript	Aèaky indeks
нормаль	normal, perpendicular	Normal
образовывать	to generate	Emele getirmek
обратная матрица	inverse matrix	Ters matrisa
обратный	opposite	Ters
обратный ход	inversion	Ters hereket
объединение множеств	unit of sets	Köplükleriň bileleëigi
объект	object	Obýekt
однородная система	homogeneous system	Birjynsly ulgam
окружность	circumference	Töwerek
описанная окружность	circumscribed circle	Daýyndan çyzylan töwerek
определение	definition	Kesgitleme
определитель	determinant	Kesgitleýji
ортогональный	orthogonal	Ortogonal
основание	base	Esas
основание наклонной	base of inclined line	Ýapgydyň esasy
основание перпендикуляра	base of perpendicular	Perpendikulýaryň esasy
основание трапеции	base of trapezoid	Trapesiýanyň esasy
основание треугольника	base of triangle	Üçburçlygyň esasy
остаточный	residual	Galyndyly
остроугольный треугольник	acute triangle	Ýiti burçly üçburçlyk
ось	axe	Ok
ось абсцисс	abscissa axis	Abssissalar oky
откладывать по оси абсцисс	to point on abscissa axis	Abssissalar okuna alyp goýmak
открывать скобки	to open parentheses	è aýlary açmak
относительный	relative	degişli
отрезок	segment	Kesim
парабола	parabola	Parabola

параллелограмм	parallelogram	Parallelogramm
параметр параболы	parameter of parabola	Parabolanyň parametri
переменная величина	variable	Üýtgeýän ululyk
пересекать	to intersect	Kesmek
пересекающиеся прямые	cross lines	Kesişýän göni çyzyklar
периметр	perimeter	Perimetr
перпендикуляр	perpendicular	Perpendikulýar
перпендикулярные прямые	perpendicular lines	Perpendikulýar göni çyzyklar
плоскость	plane	Tekizlik
площадь	area	Meýdan
площадь круга	area of circle	Tegelegiň meýdany
поверхность	surface	üst
подставить значение	to substitute a value	Bahalary ýerine goýmak
подстановка	substitution	çalèyrma
подстановка значений	substitution of values	Bahalary çalèyrmak
показательное уравнение	exponential equation	Görkezijili deňleme
полюс	pole	polýus
полюс координат	pole of coordinates	Koordinatalaryň polýusy
полюс прямой	pole of line	Göni çyzygyň polýusy
полярные координаты	polar coordinates	Polýar koordinatalar
порядок	order	tertip
порядок кривой	order of curve	Egri çyzygyň tertibi
порядок определителя	order of determinant	Kesgitleýjiniň tertibi
последовательность	sequence	yzygiderlik
постоянная величина	constant value	Hemièelik ululyk
потенцирование	potentiation	potensirleme
предел	limit	prepel
преобразование матрицы	transformation of matrix	Matrisany özgertmek
преобразование	transformation	özgertme
прибавлять	to add	goèmak
приведение	reduction	getirmek
признак	criteria	nyèan

прилежащий катет	adjacent leg	Sepleëýän katet
применение	application	ulanmak
принадлежать	to belong	Degiëli bolmak
проверять	to verify	barlamak
проводить прямую	to draw a line	Göni çyzygy geçirmek
проводить секущую	to draw a secant (line)	Kesýän çyzygy geçirmek
проекция	projection	proýeksiýa
проекция катета на гипотенузу	projection of leg to hypotenuse	Katetiň gipotenuza bolan proýeksiýasy
произвольный	arbitrary	erkin
пропорциональность	proportionality	proporsionallyk
пропорция	proportion	proporsiýa
пространство	space	Giňiëlik
противолежащий катет	opposite leg	garèysynda ýatýan katet
прямая	straight line	Göni çyzyk
прямая линия	straight line	Göni çyzyk
прямоугольная матрица	rectangular matrix	Gönüburçly matrisa
прямоугольная трапеция	rectangular trapezium	Gönüburçly trapesiýa
прямоугольник	rectangle	gönüburçlyk
прямоугольные (ортогональные) координаты	rectangular (orthogonal) coordinates	Gönüburçly (ortogonal) koordinatalar
прямоугольный треугольник	rectangled triangle	Gönüburçly üçburçlyk
равенство	equality	deňlik
равнобедренный треугольник	isosceles triangle	Deňýanly üçburçlyk
равнобокая трапеция	isosceles trapezium	Deňtaraply trapesiýa
равносильное уравнение	equivalent equation	Deňgüýçli deňleme
равносторонний треугольник	equilateral triangle	Deňtaraply üçburçlyk
радиус	radius	radius
разложение вектора	vector decomposition	Wektory bölmek

размер	size	Ölçeg
разность	difference	tapawut
разряд	charge	razrýad
ранг	rank	Rang
ранг квадратичной формы	rank of quadratic form	Kwadratík formanyň rangy
ранг матрицы	matrix range	Matrisanyň rangy
раскрывать	to open	açmak
рассматривать	to consider	görmek
расстояние	distance	aralyk
расширенная матрица	augmented matrix	Giň matrisa
результат	result	netije
решать систему	to solve a system	Ulgamy çözmek
решение (уравнения)	solution (of equation)	(deňlemäni) çözmek
ромб	rhomb(us)	Romb
ряд	series	Hatar
свободный член	independent term	Erkin agza
свойство	property	häsiýet
свойство модуля	property of absolute value	Modulyň häsiýeti
сегмент	segment	segment
секущая	secant	Kesiji
секущая кривой	secant of curve	Egri çyzygyň kesijisi
секущая линия	secant (line)	Kesiji çyzyk
секущая окружности	secant of circumference	Töweregiň kesijisi
секущая плоскость	secant plane	Tekizligiň kesijisi
секущая плоскость многогранника	secant plane of polyhedron	Köpgranlygyň kesiji tekizligi
секущая прямая	secant (line)	Kesiji göni çyzyk
семейство линий	group of lines	Çyzyklar maşgalasy
семейство линий на плоскости	group of lines on a plane	Tekizlikde çyzyklar maşgalasy
серединный перпендикуляр	middle perpendicular	Orta perpendikulýar
сечение	cross section	Kesik

симметричные точки	symmetrical points	Simmetrik noktalar
симметрия	symmetry	simmetriýa
синус угла	sine of angle	Burçuň sinusy
система	system	Ulgam
система координат	system of coordinates	Koordinatalar ulgamy
система однородных уравнений	system of homogeneous equations	Birjynsly deňlemeler ulgamy
система симметричных уравнений	system of symmetric equations	simmetrik deňlemeler ulgamy
система уравнений	system of equations	deňlemeler ulgamy
скалярное произведение векторов	scalar product of vectors	Wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly
скачок	gap	böküň
скобки	parentheses	ýaýlar
след матрицы	matrix trace	Matrisanyň yzy
сложение	addition	goëmak
сложение матриц	addition of matrix	Matrisalary goëmak
случай	case	Waka
смешанное произведение векторов	mixed product of vectors	Wektorlaryň garyýý köpeltmek hasyly
совместное применение	combined use	Bilelikde ulanmak
соответственно равны	correspondingly equal	Kybapdaë deň
соответствие	correspondence	Kybapdaëlyk
соответствовать	to correspond	Kybap bolmak
соответствующие элементы	corresponding elements	Kybapdaë elementler
составлять	to constitute	düzmek
способ	method	Usul
способ подстановки	method of substitution	Çalşyрма usuly
степень	power	dereje
столбец	column	Sütün
сторона (фигуры)	side (of figure)	Tarap
строка	row	Setir
строка матрицы	row of matrix	Matrisanyň setiri
существовать	to exist	Bar bolmak

сходиться	to converge	ýygnanmak
таблица	table	tablisa
теорема	theorem	teorema
тождественные преобразования	identical transformations	Toždestwo öžgertmeler
тождество	identity	Toèdestwo
точка	point	nokat
точка касания	point of tangency	Galtaşýan nokat
точка пересечения	point of intersection	Kesième nokady
точка разрыва	point of gap	Böküè nokady
транспонирование	transposition	transponirleme
трапеция	trapezium	trapesiýa
треугольник	triangle	üçburçlyk
трехчлен	trinomial	üçagza
тупоугольный треугольник	obtuse triangle	Kütek burçly üçburçlyk
угловой	angular	Burç
упростить	to simplify	ýönekeýleşdirmek
упрощенная система	simplified system	Ýönekeýleşen ulgam
уравнение	equation	deňleme
уравнение касательной плоскости к поверхности	equation of slope to a plane of surface	Üste bolan galtaşýan tekizligiň deňlemesi
условие	condition	Şert
устранить	to eliminate	Aradan aýyrmak
фигура	figure	figura
фокус кривой	focus of curve	Egri çyzygyň fokusy
хорда	chord	Horda
хорда дуги	span	Duganyň hordasy
центр	centre	merkez
центр круга	center of circle	Tegelegiň merkezi
центр окружности	center of circumference	Töweregiň merkezi
четырёхугольник	quadrangle	dörtburçlyk
числовая прямая	number line	San göni çyzygy
шаг	step	Ädim
эквивалентное уравнение	equivalent equation	Ekwiwalent deňleme

эквивалентные преобразования	equivalent transformations	Ekwiwalent özgertme
эксцентриситет	eccentricity	ekssentrsitet
элементы определителя	element of determinant	Kesgitleýjiniň elementleri
эллипс	ellipse	Ellips

РУССКО-АНГЛО-ФРАНЦУЗСКИЙ СЛОВАРЬ

Русский	Английский	Французский
абсцисса	abscissa	abscisse
алгебра	algebra	algèbre
алгебра матриц	algebra of matrix	algèbre matricielle
алгебраическое выражение	algebraic complement	expression algébrique
алгебраическое дополнение	algebraic expression	le cofacteur
алгебраическое уравнение	algebraic equation	équation algébrique
аргумент	argument	argument
асимптота	asymptote	asymptote
асимптоты гиперболы	asymptotes of hyperbola	asymptotes de l'hyperbole
базис	base	base
базисная строка	basic row	ligne de base
базисные переменные	basic variables	variables de base
базисный минор	basic minor	mineur de base
базисный минор матрицы	principal minor of matrix	matrice mineur de base
базисный столбец	basic column	colonne de base
базисный столбец матрицы	basic column of matrix	colonne de base de la matrice
бесконечно большая величина	indefinitely large value	infiniment grande quantité
бесконечно малая величина	infinitesimal value	infinitésimale quantité
бесконечное множество	infinite set	ensemble infini
биссектриса треугольника	bisector of triangle	bissectrice d'un triangle
биссектриса угла	bisector	bissecteur
боковые стороны трапеции	lateral sides of trapezoid	les côtés du trapèze
в соответствие	in correspondence	dans le respect

в частности	particularly	en particulier
ведущий элемент	leading element	élément de premier plan
вектор	vector	vecteur
вектор в пространстве	vector in space	espace vectoriel
вектор на плоскости	vector in plane	vecteur dans le plan
векторное произведение	vector product	produit vectoriel
величина	value	quantité
верное равенство	proper equality	une véritable
вертикальная асимптота	vertical asymptote	asymptote verticale
вертикальная прямая	vertical line	ligne verticale
верхний индекс	upper index	exposant
вершина	vertex	sommet
вершина гиперболы	vertex of hyperbola	le sommet de l'hyperbole
вершина конуса	vertex of cone	sommet du cône
вершина многогранника	vertex of polyhedron	sommet du polyèdre
вершина параболы	vertex of parabola	le sommet de la parabole
вершина пирамиды	vertex of pyramid	sommet de la pyramide
вершина треугольника	vertex of triangle	sommet du triangle
вершина угла	vertex of angle	sommet d'un angle
ветви гиперболы	branches of hyperbola	branches de la hyperbole
возведение в степень	raising to a power	égalité
вписанная окружность	inscribed circle	incircle
всегда	always	toujours
выделять полный квадрат	to separate complete square	allouer carré plein
выносить за скобки	to take out of parentheses	faire les supports
выражение	expression	expression
вырожденная матрица	singular matrix	matrice singulière
высота	height	hauteur
высота трапеции	height of trapezoid	hauteur du trapèze
высота треугольника	height of triangle	hauteur d'un triangle
вычитать	to subtract	déduire
вычисление	calculation	calcul
вычисление площади	calculation of area	calculer la surface

вычисление элементов треугольника	calculation of triangle elements	calcul des éléments du triangle
вычислять	to calculate	calculer
геометрический	geometrical	géométrique
геометрия	geometry	géométrie
гипербола	hyperbola	hyperbole
гипотенуза	hypotenuse	hypoténuse
гипотенуза треугольника	hypotenuse of triangle	hypoténuse du triangle
главная диагональ	main (principal) diagonal	diagonale principale
горизонтальная асимптота	horizontal asymptote	asymptote horizontale
горизонтальная прямая	horizontal line	ligne horizontale
градусная мера дуги	degree measure of arc	mesure de degré de l'arc
грань	edge	face
декартова система координат	Cartesian coordinates system	système de coordonnées cartésiennes
декартовы координаты	Cartesian coordinates	coordonnées cartésiennes
делать подстановку	to do substitution	faire la substitution
диагональ	diagonal	diagonale
диагональ матрицы	diagonal of matrix	matrice diagonale
диагональ многоугольника	diagonal of polygon	diagonale d'un polygone
диагональ определителя	diagonal of determinant	déterminant diagonale
диагональ параллелепипеда	diagonal of parallelepiped	diagonale du parallélépipède
диагональ четырехугольника	diagonal of quadrilateral	diagonale du quadrilatère
диагональная матрица	diagonal matrix	matrice diagonale
диаметр	diameter	diamètre
диаметр круга	diameter of circle	cercle de diamètre
диаметр окружности	diameter of circumference	diamètre de la circonférence
диаметр цилиндра	diameter of cylinder	diamètre du cylindre
диаметр шара	diameter of sphere	le diamètre de la balle
директриса	directrix	directrice
директриса гиперболы	directrix of hyperbola	hyperbole directrice

директриса параболы	directrix of parabola	directrice de la parabole
директриса эллипса	directrix of ellipse	directrice de l'ellipse
дискриминант	discriminator	discriminant
длина	length	longueur
длина дуги	arc of length	la longueur d'arc
длина катета	length of leg	longueur de la jambe
длина ломаной	length of a broken line	la longueur de la ligne brisée
длина окружности	length of circumference	longueur du circonférence
длина отрезка	length of segment	longueur du segment
дополнение множества	addition of set	complément de beaucoup
дуга	arc	arc
дуга кривой	arc of curve	arc de courbe
дуга окружности	arc of circumference	arc de circonférence
единичная матрица	unit matrix	matrice d'identité
зависимая величина	dependent value	les variables de charge
зависимость	dependence	dépendance
задавать прямую уравнениями	to determine a line with equations	demander équations directs
заключать в скобки	to put in parentheses	support
закрывать скобки	to close parentheses	parenthèse fermante
замена переменных	substitution of variables	changement de variables
знак (математический)	sign (mathematical)	signe (mathématique)
значение	value	la valeur
значение неизвестной	value of unknown	la valeur de l'inconnue
индекс	index	index
интервал	interval	intervalle
иррациональное уравнение	irrational equation	équation irrationnelle
исключение	elimination	exception
исключение неизвестных (переменных)	elimination of unknowns (variables)	élimination des inconnues (variables)
исследование	investigation	enquête
исследование функции	investigation of function	étude de la fonction

каноническое уравнение	canonical equation	équation canonique
касательная	tangent	tangente
касательная в точке перегиба кривой	tangent at a inflection point	tangente au point de la courbe d'inflexion
касательная к графику функции	tangent to a graph of function	la tangente au graphe de la fonction
касательная к окружности	tangent to a circumference	tangent à la circonférence
касательная прямая	tangent line	tangente
катет	leg (of a triangle), cathetus	cathète
квадрат	square	carré
квадратичная форма	quadratic form	forme quadratique
квадратная матрица	square matrix	matrice carrée
квадратное уравнение	quadratic equation	équation quadratique
квадратные скобки	brackets	crochets
коллинеарный вектор	collinear vector	vecteurs colinéaires
компланарный вектор	coplanar vector	vecteur coplanaires
конец	end	fin
константа	constant	constante
координата	coordinate	coordonné
координатная ось	axis of coordinate	axe de coordonnées
координатная плоскость	coordinate plane	plan de coordonnées
координаты вектора	vector coordinates	coordonnées du vecteur
координаты точки	coordinates of point	les coordonnées des points
косинус угла	cosine of angle	cosinus de l'angle
коэффициент	coefficient	coefficient
коэффициент пропорциональности	coefficient of proportionality	facteur de proportionnalité
кривая	curve	courbe
кривая второго порядка	curve of the second order	courbe du second ordre
круг	circle	cercle
круглые скобки	parentheses	parenthèses

круговой сегмент	circular segment	segment de cercle
круговой сектор	circular sector	secteur circulaire
линейное уравнение	linear equation	équation linéaire
логарифмическое уравнение	logarithmic equation	équation logarithmique
ломаная (линия)	broken (line)	ligne brisée
луч	ray	rayon
масштаб	scale	échelle
матрица	matrix	matrice
матрица квадратичной формы	matrix of square form	matrice de la forme quadratique
матрица-столбец	column matrix	matrice colonne
матрица-строка	row matrix	matrice ligne
медиана	median	médiane
метод (способ) подстановки	method of substitution	méthode substitution
метод Гаусса	method of Gauss	proceed de Gauss
метод, способ	method	procédé
минор	minor	mineur
многоугольник	polygon	polygone
наклонная	inclined line	incliné
направление	direction	direction
неверное равенство	improper equality	fausse égalité
независимая величина	independent value	valeur indépendante
независимая система	independent system	système indépendant
неизвестная	unknown	inconnu
несовместная система	inconsistent system	système incompatible
нижний индекс	subscript	indice
нормаль	normal, perpendicular	normal
образовывать	to generate	former
обратная матрица	inverse matrix	matrice inverse
обратный	opposite	arrière
обратный ход	inversion	renversement
объединение множеств	unit of sets	union des ensembles
объект	object	objet

однородная система	homogeneous system	système homogène
окружность	circumference	cercle
описанная окружность	circumscribed circle	circonscriit
определение	definition	définition
определитель	determinant	déterminant
ортогональный	orthogonal	orthogonal
основание	base	base
основание наклонной	base of inclined line	fond incliné
основание перпендикуляра	base of perpendicular	le pied de la perpendiculaire
основание треугольника	base of trapezoid	base du triangle
основания трапеции	base of triangle	base du trapèze
остаточный	residual	résiduel
остроугольный треугольник	acute triangle	triangle acutangle
ось	axis	axe
ось абсцисс	abscissa axis	l'axe X
откладывать по оси абсцисс	to point on abscissa axis	reporter l'abscisse parenthèse ouverte
открывать скобки	to open parentheses	ouverte la parenthèse
относительный	relative	relatif
отрезок	segment	segment
парабола	parabola	parabole
параллелограмм	parallelogram	parallélogramme
параллельные прямые	parallel lines	parallel lignes
параметр параболы	parameter of parabola	paramètre de la parabole
переменная величина	variable	variable
пересекать	to intersect	traverser
пересекающиеся прямые	crossing lines	lignes qui se croisent
периметр	perimeter	périmètre
перпендикуляр	perpendicular	perpendiculaire
перпендикулярные прямые	perpendicular lines	lignes qui se croisent
плоскость	plane	plan
площадь	area	aire

площадь круга	area of circle	aire d'un cercle
поверхность	surface	surface
подставить значение	to substitute a value	remplacer la valeur
подстановка	substitution	substitution
подстановка значений	substitution of values	substitution de valeurs
показательное уравнение	exponential equation	équation exponentielle
полюс	pole	pôle
полюс координат	pole of coordinates	coordonnées polaires
полюс прямой	pole of curve	pôle consécutif
полярные координаты	polar coordinates	coordonnées polaires
порядок	order	procédure
порядок кривой	order of curve	order du courbe
порядок определителя	order of determinant	afin déterminant
последовательность	sequence	séquence
постоянная величина	constant value	constante
потенцирование	potentiation	potentialisation
предел	limit	limite
преобразование	transformation	conversion
преобразование матрицы	transformation of matrix	matrice conversion
прибавлять	to add	ajouter
приведение	reduction	adduction
признак	criteria	signe
прилежащий катет	adjacent leg	côté adjacent
применение	application	application
принадлежать	to belong	appartenir
проверять	to verify	vérifier
проводить прямую	to draw a line	mener directe
проводить секущую	to draw a secant (line)	mener la section
проекция	projection	projection
проекция катета на гипотенузу	projection of leg to hypotenuse	projection de la jambe sur l'hypoténuse
произвольный	arbitrary	arbitraire
пропорциональность	proportionality	proportionnalité
пропорция	proportion	proportion
пространство	space	espace

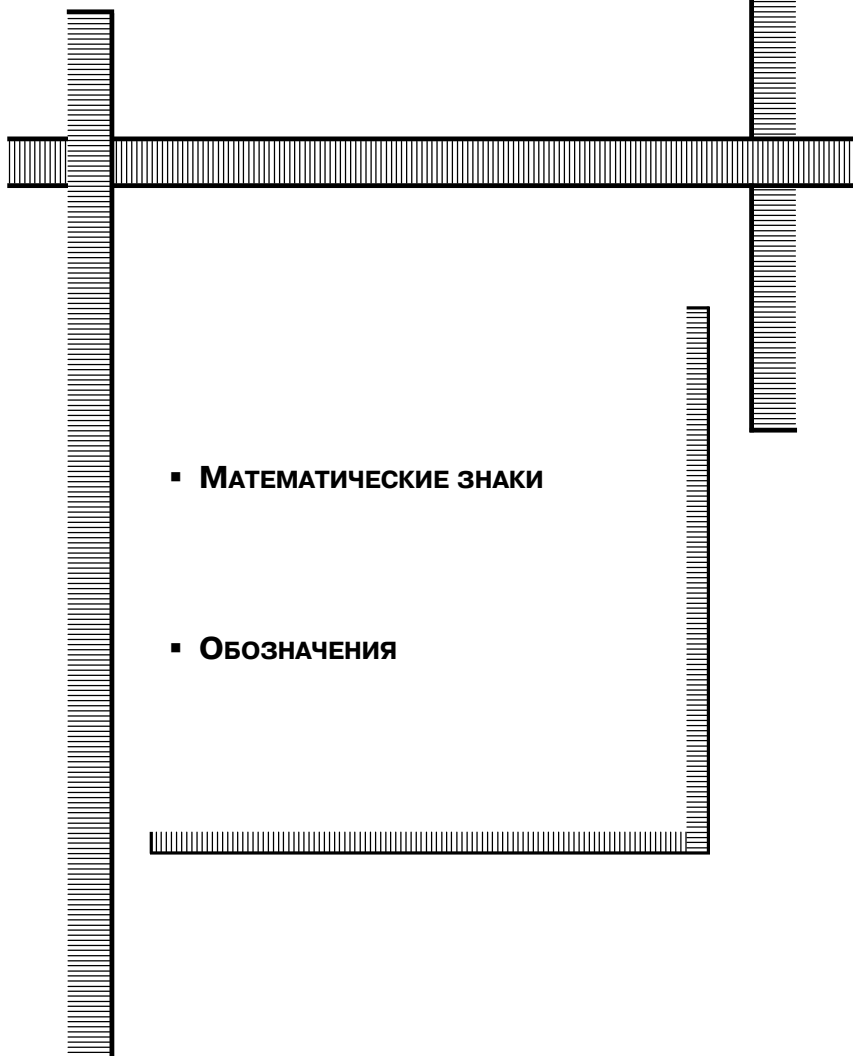
противолежащий катет	opposite leg	partie adverse
прямая	straight line	droit
прямая линия	straight line	ligne droite
прямоугольная матрица	rectangular matrix	matrice rectangulaire
прямоугольная трапеция	rectangular trapezium	trapèze rectangle
прямоугольник	rectangle	rectangle
прямоугольные (ортогональные) координаты	rectangular (orthogonal) coordinates	coordonnées (orthogonales) rectangulaires
прямоугольный треугольник	rectangled triangle	triangle rectangle
равенство	equality	égalité
равнобедренный треугольник	isosceles triangle	triangle isocèle
равнобокая трапеция	isosceles trapezium	trapèze isocèle
равносильное уравнение	equivalent equation	équivalent à l'équation
равносторонний треугольник	equilateral triangle	triangle équilatéral
радиус	radius	rayon
разложение вектора	vector decomposition	décomposition du vecteur
размер	size	taille
разность	difference	difference
разряд	charge	charge
ранг	rank	rang
ранг квадратичной формы	rank of quadratic form	le rang de la forme quadratique
ранг матрицы	matrix range	rang
раскрывать	to open	révéler
рассматривать	to consider	considérer
расстояние	distance	distance
расширенная матрица	augmented matrix	matrice prolongée
результат	result	résultat
решать систему	to solve a system	résoudre un système
решение (уравнения)	solution	solution de l'équation
ромб	rhomb(us)	rhombe

ряд	series	rang
свободный член	independent term	terme libre
свойство	property	propriété
свойство модуля	property of modulus (absolute value)	module de propriété
сегмент	segment	segment
секущая	secant	sécante
секущая кривой	secant of curve	courbes de section
секущая линия	secant (line)	sécante
секущая окружности	secant of circumference	sécante du cercle
секущая плоскость	secant plane	plan secant
секущая плоскость многогранника	secant plane of polyhedron	plan de coupe du polyèdre
секущая прямая	secant (line)	ligne sécante
семейство линий	set of lines	famille de lignes
семейство линий на плоскости	set of lines on a plane	famille de lignes sur le plan
серединный перпендикуляр	midperpendicular	médiatrice
сечение	cross section	section
симметричные точки	symmetrical points	points symétriques
симметрия	symmetry	symétrie
синус угла	sine of angle	sinus de l'angle
система	system	système
система координат	system of coordinates	coordonner
система однородных уравнений	system of homogeneous equations	système d'équations homogènes
система симметричных уравнений	system of symmetric equations	système d'équations symétrique
система уравнений	system of equations	ensemble d'équations
скалярное произведение векторов	scalar product of vectors	produit scalaire de vecteurs
скачок	gap	saut
скобки	parentheses	parenthèses
след матрицы	trace of matrix	trace de la matrice

сложение	addition	addition
сложение матриц	addition of matrix	addition des matrices
случай	case	cas
смешанное произведение векторов	mixed product of vectors	produit mixte de vecteurs
совместное применение	combined use	utilisation combinée de
соответственно равны	correspondingly equal	sont égaux
соответствие	correspondence	conformité
соответствовать	to correspond	correspondre
соответствующие элементы	corresponding elements	éléments correspondants
составлять	to constitute	constituer
способ	method	manière
способ подстановки	method of substitution	procédé de substitution
степень	power	degré
столбец	column	colonne
сторона (фигуры)	side of figure	côté de la figure
строка	row	chaîne
строка матрицы	row of matrix	matrice de la ligne
существовать	to exist	exister
сходиться	to converge	converger
таблица	table	table
теорема	theorem	théorème
тождественные преобразования	identical transformations	transformations identiques
тождество	identity	identité
точка	point	point
точка касания	point of tangency	point de tangence
точка пересечения высот треугольника	point of intersection of heights of triangle	point de hauteurs de triangle d'intersection
точка разрыва	point of gap	points d'écart
транспонирование	transposition	transposition
трапеция	trapezium	trapèze
треугольник	triangle	triangle
трехчлен	trinomial	trinôme

тупоугольный треугольник	obtuse triangle	triangle obtus
угловой	angular	angulaire
угол	angle	angle
упростить	to simplify	simplifier
упрощенная система	simplified system	système simplifié
уравнение	equation	équation
уравнение касательной плоскости к поверхности	equation of slope to a plane of surface	équation du plan tangent à la surface
условие	condition	condition
устранять	to eliminate	éliminer
фигура	figure	figure
фокус кривой	focus of curve	courbe de mise au point
хорда	chord	corde
хорда дуги	span	corde à l'arc
центр	center	centre
центр круга	center of circle	centre du cercle
центр окружности	center of circumference	centre du cercle
четырёхугольник	quadrangle	quadrilatère
числовая прямая	number line	numéro de ligne
шаг	step	étape
эквивалентное уравнение	equivalent equation	équation équivalente
эквивалентные преобразования	equivalent transformations	transformations équivalentes
эксцентриситет	eccentricity	excentricité
элементы определителя	element of determinant	éléments du déterminant
эллипс	ellipse	ellipse

Приложение



- МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗНАКИ

- ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обозначения	Название	Пример
+	плюс	$a + b = c$
–	минус	$a - b = c$
·	умножить на	$a \cdot b = c$
:	разделить на	$a : b = c$
=	равно	$a = b$
≠	не равно	$b \neq c$
≡	тождественно равно	$a + b = b + a$
≈	приближенно равно	$\pi \approx 3,14$
>	больше	$\pi > 1$
<	меньше	$\pi < \frac{22}{7}$
≥	больше или равно	$a \geq b$
≤	меньше или равно	$b \leq c$
∞	бесконечность	$+\infty, -\infty$
a	абсолютная величина (модуль)	$ -5 = 5$
a^n	число a в степени n	$2^5 = 32$
$\sqrt{\quad}$	квадратный корень	$\sqrt{16} = 4$
$\sqrt[n]{\quad}$	корень степени « n »	$\sqrt[n]{a}$
() [] { }	скобки: круглые; квадратные; фигурные	$[a - b : (c + d)] : f$
\sum	сумма	$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$
∈	принадлежит	$a_1 \in A$
!	факториал	$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
x, y, z	неизвестные или переменные	$2x + 3y = z$

$f(x), \varphi(x)$	функция	$y = f(x)$
$\log_a b$	логарифм по основанию a числа b	$\log_2 8 = 3$
$\lg x$	десятичный логарифм (основание равно 10)	$\lg 100 = 2$
$\ln x$	натуральный логарифм (основание равно e)	$\log_e x = \ln x$
\lim	предел	$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3} - 2) = 0$
\Rightarrow	следовательно	$y = \sin x \Rightarrow y \leq 1$
\Leftrightarrow	равносильно (эквивалентно)	$(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$
\forall	для любых	$\forall x \in R: \cos x \leq 1$
\exists	существует	$\exists x \in R: x^2 - 4 = 0$
$\exists!$	существует точно один	$\exists! x = 1: \log_a x = 0$
const	постоянная величина	$e \approx 2,73\dots$
Δ	треугольник	ΔABC
\parallel	параллельно	$AB \parallel CD$
\perp	перпендикулярно	$MN \perp PQ$
\sim	подобно	$\Delta ABC \sim \Delta MNP$
\angle	угол	$\angle ABC$
\cup или \cap	дуга	$\overset{\cup}{AB} \overset{\cup}{AB} \overset{\cap}{AB} \overset{\cap}{AB}$ или $\cup AB$
$^\circ$ ' "	градус; минута; секунда	$27^\circ 53' 39''$
рад	радиан	$10^\circ \approx 0,1745 \text{ рад}$
π	число π	$\pi \approx 3,1416$
$\sin \alpha$	синус угла α	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos \alpha$	косинус угла α	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	тангенс угла α	$\operatorname{tg} 1,226 \text{ рад} = 2,7844 \dots$
$\operatorname{ctg} \alpha$	котангенс угла α	$\operatorname{ctg} 0,306 \text{ рад} = 3,165 \dots$
$\sec \alpha$	секанс угла α	$\sec 0,404 \text{ рад} = 1,08755 \dots$
$\operatorname{cosec} \alpha$	косеканс угла α	$\operatorname{cosec} 30^\circ = 2$
$\operatorname{Arcsin} x$	арксинус x	$\operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} = (-1)^n 30^\circ + 180^\circ \cdot n$
$\operatorname{Arccos} x$	арккосинус x	$\operatorname{Arccos} \frac{1}{2} = \pm 60^\circ + 360^\circ \cdot n$
$\operatorname{Arctg} x$	арктангенс	$\operatorname{Arctg} \sqrt{3} = 60^\circ + 180^\circ \cdot n$
$\operatorname{Arcctg} x$	арккотангенс	$\operatorname{Arcctg} \sqrt{3} = 30^\circ + 180^\circ \cdot n$
$\arcsin x$	главное значение арксинуса	$\arcsin x \frac{1}{2} = 30^\circ$
$\arccos x$	главное значение арккосинуса	$\arccos x \frac{1}{2} = 60^\circ$
$\operatorname{arctg} x$	главное значение арктангенса	$\operatorname{arctg} 1 = 45^\circ$
$\operatorname{arcctg} x$	главное значение арккотангенса	$\operatorname{arcctg} x \sqrt{3} = 30^\circ$
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	обозначения векторов	$\vec{a} = \overline{AB}$
$ \vec{a} $	длина вектора \vec{a}	$ \vec{a} = 3$
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{h}$	координаты единичных векторов (орты) прямоугольной системы координат	
$m\vec{a}$	умножение скаляра на вектор	$3\vec{a}$
a_x, a_y, a_z	координаты вектора \vec{a} в трехмерной системе координат	$\vec{a}(2, 3, 5)$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$	определитель третьего порядка	$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$
$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	матрица	$A = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$
A_{ij}	алгебраическое дополнение	A_{11}
M_1	минор матрицы	$M_1 = 2$
dx, d^2x, d^3x	дифференциал	$dx = 3$
$f'(x), y', f'x$	производная	$y' = 7x^6$
Δx	разность, приращение	$\Delta x = 1$
$\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial x},$ $\frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$	частная производная	$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 2y$
$\int y dx$	интеграл	$\int x^2 dx = x^3 + C$
$\int_a^b f(x) dx$	определенный интеграл	$\int_{-2}^1 (6x^2 - 8x + 3) dx$
км/ч	километры в час	
км	километры	
л	литры	
тыс.	тысячи	
грн.	гривны	
кг	килограммы	

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бекмешев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Бекмешев. – М. : Наука, 1985. – 495 с.
2. Кураш А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Кураш. – М. : Наука, 1965. – 430 с.
3. Курпа Л.В. Математика для экономистов. Решение задач и варианты индивидуальных заданий : учеб. пособ. / Л.В. Курпа, Е.С. Архипова, Т.В. Корниль и др. ; под ред. Л.В. Курпы. – Х. : ХГПУ, 1999. – 333 с.
4. Курпа Л.В. Высшая математика: Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Решение задач и варианты типовых задач : учеб. пособ. в 4 т. Т. 1/ Л.В. Курпа, Ж.Б.Кашуба и др. ; под ред. Л.В. Курпы. – Х. : НТУ «ХПИ», 2006. – 344с. Рус и англ. языками.
5. Лобода А.И. Высшая математика : учеб. пос. для иностранных студентов / А.И. Лобода. – Х. : НТУ «ХПИ», 2001. – 160 с.
6. Лобода А.И., Лапузина Е.Н.. Математика для экономистов : учеб. пос. для иностранных студентов в 2 ч. Ч.І / А.И. Лобода, Е.Н. Лапузина. – Х. : НТУ «ХПИ», 2012. 240 с.
7. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М. : Наука, 1969. – 640 с.
8. Привалов И.И Аналитическая геометрия / И.И Привалов. – М. : ФМ, 1963. – 272 с.
9. Высшая математика в примерах и задачах : учеб. пособ. в 2-х т. / Ю.Л. Геворкян, Л.А. Балака, С.Е. Габриелян, Л.В. Курпа и др. ; под ред. Ю.Л. Геворкяна. – Х. : Підручник НТУ «ХП», 2011. 406с.
10. Вища математика. Програма, методичні вказівки, контрольні завдання для студентів заочного навчання / Ю.Л. Геворкян, Т.В. Афоніна, Л.А. Балака і др. ; за ред. Ю.Л. Геворкяна. – Х. : НТУ «ХП», 1994. – 240 с.
11. Справочник по математике для экономистов : учебн. пособ. / В.И. Ермакова и др. ; под ред. В.И. Ермакова. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : ИМФРА – М., 2007. 4 64 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Модуль 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ	5
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1	8
<i>Теоретические сведения, необходимые для выполнения контрольной работы 1</i>	9
<i>Пример контрольной работы 1</i>	17
<i>Пример решения контрольной работы 1</i>	18
<i>Контрольная работа 1. Варианты заданий</i>	25
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2	28
<i>Теоретические сведения, необходимые для выполнения контрольной работы 2</i>	29
<i>Пример контрольной работы 2</i>	32
<i>Пример решения контрольной работы 2</i>	33
<i>Контрольная работа 2. Варианты заданий</i>	38
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3	40
<i>Теоретические сведения, необходимые для выполнения контрольной работы 3</i>	41
<i>Пример контрольной работы 3</i>	46
<i>Пример решения контрольной работы 3</i>	47
<i>Контрольная работа 3. Варианты заданий</i>	51
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ (РГЗ) 1	54
<i>Пример расчетно-графического задания (РГЗ) 1</i>	55
<i>Пример решения РГЗ 1</i>	56
<i>Расчетно-графическое задание (РГЗ) 1. Варианты заданий</i>	65

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ (РГЗ) 2	70
<i>Теоретические сведения, необходимые для выполнения расчетно-графического задания 2</i>	71
<i>Пример РГЗ 2</i>	76
<i>Пример решения РГЗ 2</i>	77
<i>Расчетно-графическое задание (РГЗ) 2. Варианты заданий</i>	80
МОДУЛЬНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1	84
<i>Пример модульной контрольной работы 1</i>	85
<i>Модульная контрольная работа 1. Варианты заданий</i>	86
СЛОВАРЬ	89
<i>Русско-англо-арабский словарь</i>	90
<i>Русско-англо-вьетнамский словарь</i>	102
<i>Русско-англо-китайский словарь</i>	114
<i>Русско-англо-туркменский словарь</i>	127
<i>Русско-англо-французский словарь</i>	140
ПРИЛОЖЕНИЕ	152
ЛИТЕРАТУРА	157

Навчальне видання

ЛАПУЗІНА Олена Миколаївна
ЛОБОДА Анатолій Іванович
СМОРОДСЬКА Інна Васильєвна

**ВИЩА МАТЕМАТИКА
У ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ
ЧАСТИНА 1**

Навчальний посібник для студентів-іноземців

Російською мовою

Роботу до видання рекомендував доц. *Ю.Р.Гаврилюк*
В авторській редакції

Оригінал-макет підготувала *Космачова Т.С.*

План 2015 р., поз. 80

Підписано до друку . Формат 60х84 1/8. Папір офсетний.
Друк – ризографія. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 8,7.
Наклад 100 прим. Зам. № . Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». 61002, Україна, Харків, вул. Фрунзе, 21
Свідцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.

Друкарня НТУ «ХПІ» 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21